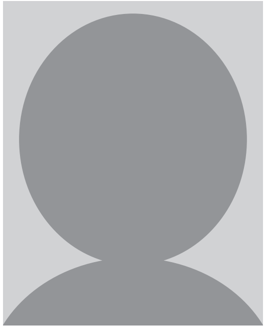
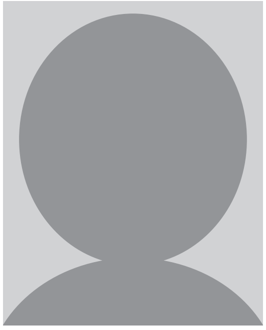
問題解決の数理（’１７）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.

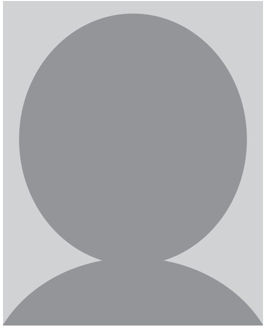


-
- 今回から１５回にわたり,「問題解決の数理」の講義を担当する，大西です.よろしくお願いします.
- この科目,「問題解決の数理」は，一言で言うと，数学を利用して，現実世界の様々な問題を解く…と言うとちょっと大げさかもしれません.
- 意思決定問題とか，最適決定問題ととか呼ばれる問題を扱います.
-



- 「数学を利用する」ということも含め，ちゃんと言い直しますと，
- この科目では，数理モデルを用いて，多くの場合は計算機の力を借りて，現実世界の様々な意思決定問題とか，最適決定問題と呼ばれる問題を解く方法について講義します.
- 「オペレーションズリサーチ」，略して OR という学問分野をご存知であれば,「オペレーションズリサーチ」の講義であると思っていただいて結構です.
- それでは，さっそく今回の本題に移りたいと思います.

線形最適化問題



- 今回の講義では，線形最適化法の一回目として，線形最適化問題と，その定式化についてお話します.
- 線形最適化法は，長年，線形計画法という呼び名で知られきて，現在もその呼び名は使われていますが，近年になり，線形最適化法と呼ばれる傾向にありまして，この講義でも新しい呼び名を使います.

線形最適化問題

数理最適化法（数理計画法）

- 与えられた制約条件の下で，評価基準（目的関数）を最適な値にするための変数の値を求める手法
- 現実の問題に広く適用が可能
- 数理的な問題解決の基礎となる手法

- 線形最適化法は数理最適化法の一種です.
- 数理最適化法も，数理計画法と呼ばれてきた手法で，近年では数理最適化法と呼ばれる傾向にあります.
- 数理最適化法は一言で言うと,「与えられた制約条件の下で，評価基準を最適な値にするための変数の値を求める手法」ということになります.
- これだけの説明では，ビジネス等の実世界の具体的な問題解決と数理最適化法の結びつきは分かり辛いと思われますが，回を重ねていくと明らかになってきます.
- 数理最適化法は，数理的な問題解決の基礎となる手法で，多くの手法の背後に数理最適化法が関わっています.
-

線形最適化問題

数理最適化問題

- 目的関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
  - 好ましさ（好ましくなさ）の評価値
- 制約条件　$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0,\ \ h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots$$

  - 制約を満たし，目的関数を最大化（最小化）する $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値を決める

- 数理最適化法とは数理最適化問題を解く手法です.
- 数理最適化問題とは，与えられた制約条件の下で，評価基準を最適にするための変数の値を求める問題で，広く現実の問題に当てはまります.
- 評価基準は目的関数として表現されます.
- 目的関数は，特定の代替案を選択した場合の好ましさ，あるいは好ましくなさの評価値で，これを最大に，あるいは最小にする変数 x_1 から x_n の値を求めます.
- ただし，多くの場合，変数 x_1 から x_n は任意の値をとることができず，何らかの制約条件を満たすことが求められます.
- 制約条件は，不等式や等式，集合等の形で表現されます.
- まとめますと，数理最適化問題は制約条件を満たし，目的関数を最大化，あるいは最小化する変数 x_1 から x_n の値を求める問題となります.
- もう少し，具体的な例を見てましょう.

線形最適化問題

線形最適化問題（線形計画問題）

- x_1, x_2 が

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &\le 24 \\
4x_1 + 4x_2 &\le 48 \\
x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

  を満たすとき，

$$z = x_1 + 2x_2$$

  の最大値，およびその時の x_1, x_2 の値を求めよ

- 変数 x_1, x_2 がここに示す 4 つの不等式制約を満たすとき，$z = x_1 + 2x_2$ の最大値，およびその時の x_1, x_2 の値を求めよという問題です．
- この問題は目的関数も，制約条件も一次式であることから線形最適化問題と呼ばれます．
- 高校の数学で習った方も多いと思います．

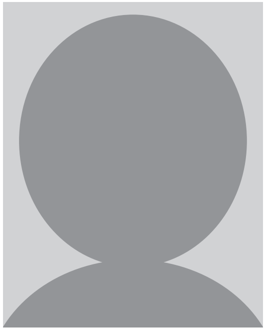
線形最適化問題

線形最適化問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
 & 4x_1 + 4x_2 \leq 48 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- 先ほどの問題を，ここに示すように，書くことにします．
- この線形最適化問題が，数学の問題としては分かったとして，それが現実の問題解決と，どう関係するのだろう，というのが気になるところでしょう．
- 次のセクションでは，具体的な問題を考えます．
-

生産計画問題



- それでは，この科目の記念すべき最初の例題として，線形最適化法の最も代表的な例題である生産計画問題について考えていきましょう．

生産計画問題

問題

- 2 種類の製品 P1 と P2 を生産
- P1 は 1 kg あたり 1 万円の利益の見込み
- P2 は 1 kg あたり 2 万円の利益の見込み
- 利益が最大になるように P1 と P2 を生産したい
- ただし，生産にあたっては次の 3 つの制約を満たす必要 (続く)

- 生産計画問題とはこのような問題です．
- ある会社では，2 種類の製品 P1 と製品 P2 を生産していて，
- 製品 P1 は 1 kg あたり 1 万円，製品 P2 は 1 kg あたり 2 万円の利益が見込める．
- 利益が最大になるように製品 P1 と製品 P2 の生産量を決定する，という問題です．
- ただし，生産にあたっては資源に関する次の 3 つの制約条件を満たす必要があります．

生産計画問題

使用原料制約

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 1 kg の原料
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 3 kg の原料
- 1 日あたりの最大使用可能量は 24 kg

- １つ目の制約は，使用原料に関する制約です．
- 製品 P1 と製品 P2 を生産するにあたり，製品 P1 を 1 kg 生産するには 1 kg の原料，製品 P2 を 1 kg 生産するのに 3 kg の原料が必要である．
- 1 日あたりの原料の最大使用可能量は 24 kg である…という制約です．

生産計画問題

労働時間制約

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのにも 4 時間の労働時間
- 1 日あたりの延べ労働時間は 48 時間以内

- 2 つ目の制約は，労働時間に関する制約です．
- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間，製品 P2 を 1 kg 生産するのにも 4 時間の労働時間を要する．
- 1 日あたりの延べ労働時間は 48 時間以内にしなければいけない…という制約です．

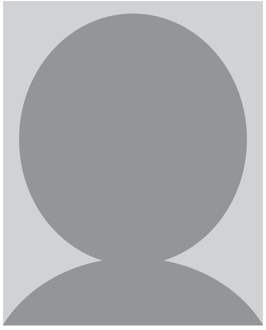
生産計画問題

機械稼働時間制約

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 2 時間の機械稼働時間
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 1 時間の機械稼働時間
- 機械稼働時間は 1 日あたり 22 時間以内

- 1 日あたりの利益見込みが最大になる，製品 P1 と P2 の 1 日あたりの生産量を決定せよ

- 3 つ目の制約は，機械稼働時間に関する制約です．
- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 2 時間の機械稼働時間，
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 1 時間の機械稼働時間を必要とする．
- また，メンテナンスに 1 日あたり 2 時間要するので，
- 製品 P1 と製品 P2 を生産するための機械の稼働時間は 1 日あたり 22 時間以内にしなければならない…という制約です．



- 以上３つの制約をすべて満たした上で，１日あたりの利益見込みが最大になる，製品Ｐ１と製品Ｐ２の１日あたりの生産量を決定せよ…という問題です．
- それでは，この生産計画問題を線形最適化問題として定式化していきます．

生産計画問題

目的の定式化

- 製品 P1 と P2 をそれぞれ x_1, x_2 (kg) 生産
- x_1, x_2 は決定変数
- P1 は 1 kg あたり 1 万円，P2 は 1 kg あたり 2 万円の利益見込み
- P1 を x_1 (kg)，P2 を x_2 (kg) 生産した時の利益見込み z (万円) は

$$z = x_1 + 2x_2$$

- z は目的関数

- 製品 P1 を x_1 kg，製品 P2 を x_2 kg 生産するとします．
- ここで，x_1, x_2 は値を決定すべき変数という意味で決定変数と呼ばれます．
- 製品 P1 は 1 kg あたり 1 万円，製品 P2 は 1 kg あたり 2 万円の利益が見込めることから，製品 P1 を x_1 kg 生産すると x_1 (万円) の利益見込み，製品 P2 を x_2 kg 生産すると，$2x_2$ (万円) の利益見込みとなります．
- したがって，製品 P1 を x_1 (kg)，P2 を x_2 (kg) 生産した時の利益見込み z，単位は万円です．利益見込み z は，

$$z = x_1 + 2x_2$$

  と表されます．
- 利益見込み z を最大化することが目的ですので，この z は目的関数と呼ばれます．

生産計画問題

使用原料制約の定式化

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 1 kg の原料
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 3 kg の原料
- P1 を x_1 (kg)，P2 を x_2 (kg) 生産するには $x_1 + 3x_2$ (kg) の原料が必要
- 1 日あたりの最大使用可能量は 24 kg
- 使用原料の制約は

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

- 次に，使用原料に関する制約を定式化します．
- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 1 kg の原料，製品 P2 を 1 kg 生産するのに 3 kg の原料が必要であることから，製品 P1 を x_1 kg 生産するには x_1 kg の原料，製品 P2 を x_2 kg 生産するには $3x_2$ kg の原料が必要です．
- したがって，製品 P1 を x_1 kg，製品 P2 を x_2 kg 生産するには $x_1 + 3x_2$ kg の原料が必要です．
- 1 日あたりの原料の最大使用可能量は 24 kg であることから使用原料の制約は一次不等式，$x_1 + 3x_2 \leq 24$ で表されます．

生産計画問題

労働時間制約の定式化

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間
- 製品 P1 を x_1 (kg)，製品 P2 を x_2 (kg) 生産するには $4x_1 + 4x_2$ (時間) の労働時間が必要
- 1 日あたりの延べ労働時間は 48 時間以内
- 労働時間に関する制約は

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

- 次に，労働時間に関する制約を定式化します．
- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間，製品 P2 を 1 kg 生産するのにも 4 時間の労働時間を要することから，
- 製品 P1 を x_1 kg，製品 P2 を x_2 kg 生産するには，合計 $4x_1 + 4x_2$ 時間の労働時間が必要です．
- 1 日あたりの延べ労働時間は 48 時間以内にしなければいけないことから，労働時間に関する制約は一次不等式，

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

  で表されます．

生産計画問題

機械稼働時間制約の定式化

- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 2 時間の機械稼働時間
- 製品 P2 を 1 kg 生産するのに 1 時間の機械稼働時間
- P1 を x_1 (kg)，製品 P2 を x_2 (kg) 生産するには $2x_1 + x_2$ (時間) の機械稼働時間が必要
- 機械稼働時間は 22 時間以内
- 機械稼働時間に関する制約は

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

- 次に，機械稼働時間に関する制約を定式化します．
- 製品 P1 を 1 kg 生産するのに 2 時間の機械稼働時間，製品 P2 を 1 kg 生産するのに 1 時間の機械稼働時間を必要とすることから，
- 製品 P1 を x_1 kg，製品 P2 を x_2 kg 生産するには，合計 $2x_1 + x_2$ 時間の機械稼働時間を要します．
- 機械稼働時間は 22 時間以内にしなければならないことから，機械稼働時間に関する制約は一次不等式，

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

  で表されます．

生産計画問題

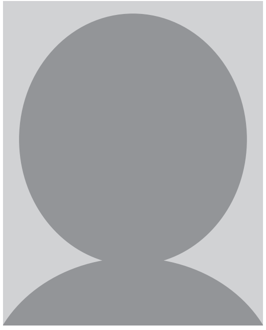
生産計画問題の定式化

最大化	$z = x_1 + 2x_2$	1日あたりの利益
制約条件	$x_1 + 3x_2 \leq 24$	使用原料制約
	$4x_1 + 4x_2 \leq 48$	労働時間制約
	$2x_1 + x_2 \leq 22$	機械稼働時間制約
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	非負条件

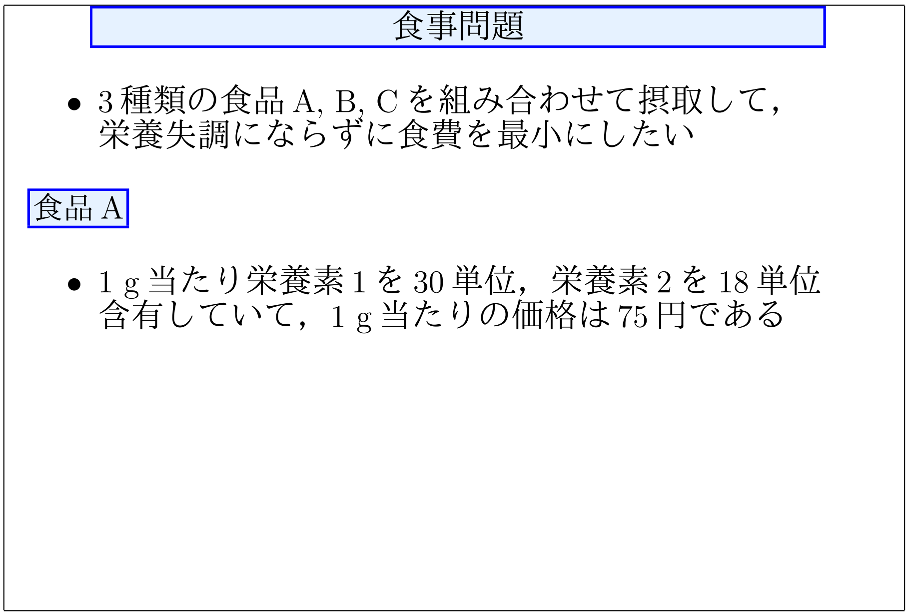
- 目的関数も制約条件も一次式，決定変数は連続量
  → 線形最適化問題

- 以上3つの制約に加えて，生産量は負の値にならないことから，$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ も制約として必要です．
- 以上をまとめると，生産計画問題はこのように定式化されます．
- 目的関数は利益見込み z で，x_1, x_2 の一次関数で表されます．
- この z を最大化する生産量 x_1, x_2 を求めます．
- ただし，製品を生産するには原料が必要で，使用できる原料の上限は 24 kg であることから，使用原料の制約は，最初の不等式で表されます．x_1, x_2 の一次不等式になっています．
- また，製品を生産するための延べ労働時間は最大 48 時間であることから，労働時間の制約は，2 番目の不等式で表されます．
- これも x_1, x_2 の一次不等式になっています．
- さらに，製品を生産するための機械稼働時間は最大 22 時間であることから，機械稼働時間の制約は，3 番目の不等式で表されます．
- これも x_1, x_2 の一次不等式になっています．
- 以上のように，生産計画問題は，目的関数が一次関数，制約条件が一次不等式で表される線形最適化問題として定式化されます．

食事問題



- 今度は，食事問題と呼ばれる線形最適化問題を紹介します.
- これもまた線形最適化法の代表的な例題です。
- さっそく，食事問題について見ていきましょう.



- 3種類の食品A, B, Cを 組み合わせて摂取して，栄養失調にならないことを前提に食費を最小にしたい.
- 1日当たり食品A, B, Cを各々何gずつ摂取すればよいか，という問題です.
- 各食品の栄養素の含有量と価格は次の通りです.
- まず，食品Aは，1 g当たり栄養素1を30単位，栄養素2を18単位含有していて，1 g当たりの価格は75円です.

食事問題

- 3 種類の食品 A, B, C を組み合わせて摂取して，栄養失調にならずに食費を最小にしたい

食品 B

- 1 g 当たり栄養素 1 を 18 単位，栄養素 2 を 22 単位含有していて，1 g 当たりの価格は 62 円である

- 次に，食品 B は，1 g 当たり栄養素 1 を 18 単位，栄養素 2 を 22 単位含有していて，1 g 当たりの価格は 62 円です.

食事問題

- 3 種類の食品 A, B, C を組み合わせて摂取して，栄養失調にならずに食費を最小にしたい

食品 C

- 1 g 当たり栄養素 1 を 11 単位，栄養素 2 を 40 単位含有していて，1 g 当たりの価格は 50 円である

- 最後に，食品 C は，1 g 当たり栄養素 1 を 11 単位，栄養素 2 を 40 単位含有していて，1 g 当たりの価格は 50 円です．

食事問題

- 3種類の食品 A, B, C を組み合わせて摂取して，
  栄養失調にならずに食費を最小にしたい

制約条件

- 1日当たり，栄養素1は150単位以上，
  栄養素2は100単位以上摂取する必要がある

問題

- 制約条件を満たし，食費を最小にする食品 A, B, C の
  1日当たりの摂取量を求めよ

- この問題は，栄養失調にならずに食費を最小に抑えるということでした．
- 栄養失調にならないという制約条件は，具体的には，1日当たり，栄養素1を150単位以上，栄養素2を100単位以上摂取する必要がある，ということになります．

食事問題

決定変数と目的関数の定式化

- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取する → x_A, x_B, x_C は決定変数
- 1 g あたりの価格は食品 A が 75 円，食品 B が 62 円，食品 C が 50 円
- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の価格 z は

$$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$$

- 問題の要素が出揃ったところで，問題の定式化に取り掛かりましょう．
- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取するとします．
- つまり，x_A, x_B, x_C を決定変数とします．
- 食品 A は 1 g あたり 75 円ですので，x_A (g) 摂取すると，$75x_A$ (円) かかります．
- 食品 B は 1 g あたり 62 円，食品 C は 1 g あたり 50 円ですので，食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の価格 z，単位は円です，価格 z は
$$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$$
となります．

食事問題

決定変数と目的関数の定式化

- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取する → x_A, x_B, x_C は決定変数
-

制約を満たし，z を最小化する x_A, x_B, x_C を

$$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$$

-

- 栄養素 1，栄養素 2 をの必要量を摂取し，価格 z を最小にする x_A, x_B, x_C を求める問題ということになります．
- 目的関数は z で，決定変数は x_A, x_B, x_C です．

食事問題

栄養素 1 の制約の定式化

- 食品 A, B, C は栄養素 1 を各々 30 (単位/g)，18 (単位/g)，11 (単位/g) 含有
- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 1 の摂取量は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C$$

- 次に，栄養 1 の摂取量に関する制約を定式化します．
- 食品 A は，1 g 当たり栄養素 1 を 30 単位含有していますので，食品 A を x_A (g) 摂取すると，栄養素 1 を $30x_A$ (単位) 摂取したことになります．
- 食品 A, B, C は，1 g 当たり栄養素 1 を各々，30 単位，18 単位，11 単位含有していますので，食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 1 の摂取量は合計 $30x_A + 18x_B + 11x_C$ となります．

食事問題

栄養素 1 の制約の定式化

- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 1 の摂取量は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C$$

- 栄養素 1 は 150 単位以上必要
- 栄養素 1 に関する制約は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C \geq 150$$

- 栄養素 1 は 150 単位以上摂取する必要がありますので，栄養素 1 に関する制約は下の式で表されます．
- 見ての通り，x_A, x_B, x_C の一次不等式になっています．

食事問題

栄養素 2 の制約の定式化

- 食品 A, B, C は栄養素 2 を各々 18 (単位/g)，22 (単位/g)，40 (単位/g) 含有
- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 2 の摂取量は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C$$

- 栄養素 2 の摂取量に関する制約についても同様です．
- 食品 A, B, C は，1 g 当たり栄養素 2 を各々 18 単位，22 単位，40 単位含有しています．
- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 2 の摂取量は下の式で表されます．

食事問題

栄養素 2 の制約の定式化

- 食品 A を x_A (g)，食品 B を x_B (g)，食品 C を x_C (g) 摂取した場合の栄養素 2 の摂取量は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C$$

- 栄養素 1 は 100 単位以上必要
- 栄養素 2 に関する制約は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C \geq 100$$

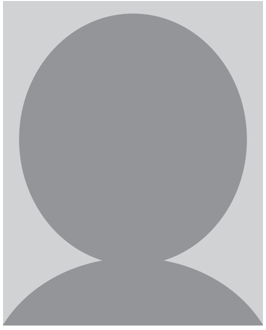
- 栄養素 2 は 100 単位以上摂取する必要がありますので，栄養素 2 に関する制約は下の式で表されます．
- これも，x_A, x_B, x_C の一次不等式になっています．

食事問題

食事問題の定式化

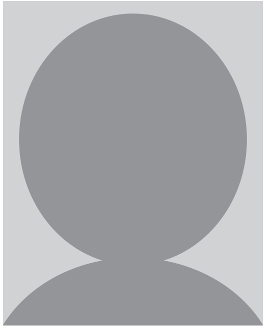
$$
\begin{array}{rll}
\text{最小化} & z = 75x_A + 62x_B + 50x_C & \text{価格} \\
\text{制約条件} & 30x_A + 18x_B + 11x_C \geq 150 & \text{栄養素 } 1 \\
& 18x_A + 22x_B + 40x_C \geq 100 & \text{栄養素 } 2 \\
& x_A, x_B, x_C \geq 0 & \text{非負条件}
\end{array}
$$

- 栄養素 1 と栄養素 2 の摂取量に関する制約に加えて，食品の摂取量，x_A, x_B, x_C は非負であることも制約になります．
- 以上をまとめると，食事問題はこのように定式化されます．
- 決定変数は x_A, x_B, x_C です．
- 目的関数は価格 z で，x_A, x_B, x_C の一次関数になっています．
- 栄養素 1 と栄養素 2 の摂取量の制約は，どちらもは，x_A, x_B, x_C の一次不等式になっています．
- 非負条件も合わせて，目的関数，制約条件とも x_A, x_B, x_C の一次式になっていることから，食事問題も線形最適化問題として定式化されていることが分かります．



- 生産計画問題に続き，食事問題も線形最適化問題として定式化できました．
- 線形最適化法は色々な問題に適用できそうだと感じていただければ嬉しいのですが，これら二つの問題だけではごく限られた問題にしか適用できないと思われるかもしれません．
- 次のセクションでは，線形最適化法のさらなる適用可能性を感じさせる例を紹介します．

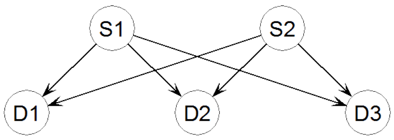
輸送問題



- 今度は，輸送問題と呼ばれる線形最適化問題を紹介します．
- これもまた線形最適化法の代表的な例題ですが，生産計画問題や食事問題とは多少趣が異なるかもしれません．
- さっそく，輸送問題について考えていきましょう．

輸送問題

- 送出元 S1, S2 から受取先 D1, D2, D3 に最小コストで荷物を運ぶ



輸送コスト (千円/トン)

	D1	D2	D3
S1	10	6	16
S2	8	8	10

送出量 (トン)

S1	80
S2	160

受取量 (トン)

D1	120
D2	40
D3	80

- 輸送問題とは次のような問題です.
- 図に示したように，送出元 S1, S2 から受け取り先 D1, D2, D3 に荷物を輸送します.
- 上の表は，送出元から受け取り先へ荷物を輸送する際のコストを示しています.
- 送出元 S1 から，受け取り先 D1 へは 1 トン当たり 10 千円，つまり 1 万円のコストがかかることを示しています.
- 同様に，送出元 S1 から，受け取り先 D2 へは 1 トン当たり 6 千円，また，送出元 S2 から，受け取り先 D1 へは 1 トン当たり 8 千円のコストがかかることを示しています.
- 下の左の表は送出元から送り出す荷物の量を示しています.
- すなわち，送出元 S1 からは 80 トンの荷物を送り出す.
- 送出元 S2 からは 160 トンの荷物を送り出すことを示しています.
- 右の表は受取先が受け取る荷物の量を示しています.
- すなわち，受け取り先 D1 は 120 トンの荷物を受け取る.
- 受け取り先 D2 は 40 トンの荷物を受け取る.
- 受け取り先 D3 は 80 トンの荷物を受け取ることを示しています.
- 以上の条件で，輸送コストを最小とするには，それぞれの送出元から受け取り先にどれだけの荷物を輸送すればよいか…という問題です.

輸送問題

目的の定式化

- 送出元 Si から受け取り先 Dj に x_{ij} (トン) 輸送
- x_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ は決定変数
- 輸送コスト z(千円) は

	D1	D2	D3
S1	10	6	16
S2	8	8	10

$$z = 10x_{11} + 6x_{12} + 16x_{13} + 8x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23}$$

- 輸送問題はコスト z を最小化

- 輸送問題も線形最適化問題として定式化することができます．
- 送出元 Si から受け取り先 Dj に x_{ij} トン輸送するとします．
- x_{ij} は決定変数です．
- x_{ij} には添え字が 2 つ付いていますが，分かりやすさのための表記であり，x_{11}, x_{12}, x_{13} を各々 x_1, x_2, x_3 とし，x_{21}, x_{22}, x_{23} を各々 x_4, x_5, x_6 としても本質的には変わりません．
- 送出元 Si から受け取り先 Dj への輸送コストは，1 トン当たりの輸送コストに輸送量をかけた金額になります．
- 例えば，送出元 S1 から受け取り先 D2 への輸送には 1 トン当たり，6 千円の輸送コストがかかりますから，送出元 S1 から受け取り先 D2 へ x_{12} トン輸送するコストは $6x_{12}$ 千円となります．
- また，送出元 S2 から受け取り先 D3 への輸送には 1 トン当たり，10 千円の輸送コストがかかりますから，送出元 S2 から受け取り先 D3 へ x_{23} トン輸送するコストは $10x_{23}$ 千円となります．
- 総輸送コスト z は，それらの総和となりますから，

$$z = 10x_{11} + 6x_{12} + 16x_{13} + 8x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23}$$

と表されます．繰り返しますが，輸送問題は輸送コスト z を最小化する問題です．

輸送問題

送出量の制約の定式化

S1	80
S2	160

- 送出元 S1 からは合計 80 トン送出するから，

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

- 次に送出に関する制約条件を定式化します.
- 送出元 S1 からは合計 80 トン送出しますから，S1 から，受け取り先 D1, D2, D3 への送出量の合計は 80 トンになります.
- したがって，$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$ となります.

輸送問題

送出量の制約の定式化

S1	80
S2	160

- 送出元 S2 からは合計 160 トン送出するから，

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 160$$

- 同様に，送出元 S2 からは合計 160 トン送出しますから，S2 から，受け取り先 D1, D2, D3 への送出量の合計は 160 トンになります．
- したがって，$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 160$ となります．

輸送問題

受取量の制約の定式化

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先 D1 は合計 120 トン受け取るから，

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

- 次に受け取りに関する制約条件を定式化します．
- 受け取り先 D1 は合計 120 トン受け取りますから，送出元 S1 と S2 から受け取り先 D1 が受け取る量の合計は 120 トンになります．したがって，

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

となります．

輸送問題

受取量の制約の定式化

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先 D2 は合計 40 トン受け取るから，

$$x_{12} + x_{22} = 40$$

- 同様に，受け取り先 D2 は合計 40 トン受け取りますから，送出元 S1 と S2 から受け取り先 D2 が受け取る量の合計は 40 トンになります．したがって，

$$x_{12} + x_{22} = 40$$

となります．

輸送問題

受取量の制約

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先 D3 は合計 80 トン受け取るから，

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

- また，受け取り先 D3 は合計 80 トン受け取りますから，送出元 S1 と S2 から受け取り先 D3 が受け取る量の合計は 80 トンになります．したがって，

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

となります．

輸送問題

最小化	$z = 10x_{11} + 6x_{12} + 16x_{13}$	
	$\quad + 8x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23}$	輸送コスト
制約条件	$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$	S1 の送出量
	$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 160$	S2 の送出量
	$x_{11} + x_{21} = 120$	D1 の受け取り量
	$x_{12} + x_{22} = 40$	D2 の受け取り量
	$x_{13} + x_{23} = 80$	D3 の受け取り量
	$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \cdots, x_{23} \geq 0$	非負条件

- 以上の制約に加えて，輸送量は負の値にならないことから，各決定変数は 0 以上，すなわち非負であることも制約として必要です．
- 以上をまとめると，輸送問題はこのように定式化されます．
- 目的関数は輸送コスト，より正確には輸送コストの総和 z です．
- 6 つの変数 x_{11}〜x_{23} の一次関数になっています．
- 輸送コスト z が最小になるように，各送出元と各受け取り先の間の輸送量を決定する問題です．
- 制約条件として，まず送出元の送出量の制約があります．
- 送出元 S1 の送出量は 80 トンですから，

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

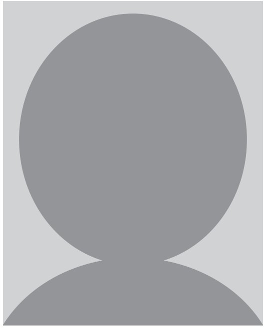
  を満たす必要があります．
- 生産計画問題や食事問題とは異なり，等式制約になっています．
- 同様に，送出元 S2 の送出量は 160 トンですから，これも等式制約となります．
- 次は受取先の受け取り量の制約です．
- 受け取り先 D1 の受け取り量は 120 トンですから，

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

  を満たす必要があります．
- 一次の等式制約です．
- 受け取り先 D2, D3 も同様に等式制約になります．

- また，輸送量は負にはならないので，各決定変数は 0 以上である必要があります．
- 以上，輸送問題の定式化を行いました．
- 輸送問題は非負条件を除いて，制約が等式になっています．
- 生産計画問題や食事問題では，制約がすべて不等式であったので，趣が異なるかもしれませんが，目的関数も制約も，一次式，すなわち線形式で表されていますので，輸送問題はまぎれもない線形最適化問題です．
- また，決定変数 x_{ij} が添え字を 2 つ持っていることも，生産計画問題とは異なります．
- x_{ij} は送出元と受け取り先の間の輸送量を表していましたが，対象 i と対象 j の関係を表わしていることになります．
- このように対象間の関係を扱うことにより，線形最適化法の適用範囲はさらに広がります．
- このような例は第 3 回以降に何度か出てきます．
- 問題の定式化でよく使われるテクニックと言えるでしょう．
- この例題は変数が 6 個もあり，手計算で解くのは大変そうですが，現実世界の問題では変数の数はそれよりはるかに多く，計算機を用いて解くことが一般的です．
- そういう訳で，問題を解くことはひとまず置いておいて，まずは問題の定式化に集中して下さい．

線形最適化問題の一般的な定式化



-
- ここまでに線形最適化問題の定式化の例を示しました．
- ここでは，線形最適化問題とは何であるかを明確にし，一般的な線形最適化問題のモデルを示します．

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

- 決定変数を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする時，目的関数 z は決定変数の一次関数

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- z を最小化あるいは最大化

- 決定変数を $x_1, x_2,$ 途中略して, x_n とする時，目的関数 z は決定変数の一次関数

  $$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \text{途中略して} + c_n x_n$$

  の形で表されます.
- そして，目的関数 z を最小化あるいは最大化する決定変数 x の値を求めます.
- 生産計画問題は目的関数を最大化する最大化問題で，食事問題と輸送問題は最小化問題でした.

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

- 制約式は決定変数の一次不等式あるいは一次方程式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &\geq b_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- 制約式は決定変数の一次不等式あるいは一次の等式，すなわち一次方程式で記述されます．
- 不等号の向きはどちらでも構いませんが，等号のない不等号では，最小値最大値が定義できないので，不等号の場合は，等号付きの不等号である必要があります．

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化/最大化} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

- 以上をまとめると，一般に線形最適化問題はこのように定式化されます．
- ここでタイトルの『最も』とカギ括弧付きで書かれた部分が気になる方もいるかと思います．
- 確かにこれで，線形最適化問題一般の定式化としては，何も問題ないのですが，シンプレックス法等の線形最適化問題の解法は，この『最も』一般的な定式化に幾つかの仮定を加えています．
- シンプレックス法については次回説明しますが，その準備にもなりますし，線形最適化問題の数学的構造を理解したり，自力で様々な問題を定式化して解くためのトレーニングにもなりますので，仮定を加えた線形最適化問題について考えることにしましょう．
- これから，その仮定を加えていきますが，
- ここで示している,『最も』一般的な形で定式化されている問題は，仮定を加えてもすべて定式化可能です．
- したがって，仮定を加えても一般性は失いません．
- それでは，仮定を加えていきましょう．

線形最適化問題の一般的な定式化

目的関数の最小化問題に限定

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
\text{最小化} & z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n
\end{array}
$$

- まず，目的関数に仮定を加えます．
- 目的関数を最小化する最小化問題と最大化する最大化問題がありますが，
- 線形最適化問題は最小化問題として定式化することとします．
- 最大化問題は目的関数の係数に -1 をかけることにより最小化問題に変換することができることから，最小化問題に限定しても一般性を失いません．

線形最適化問題の一般的な定式化

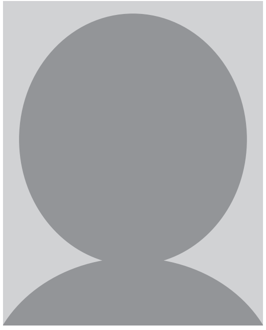
- 制約
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \begin{array}{c}\leq\\=\\\geq\end{array} b$$
において，$b \geq 0$
- $b < 0$ のとき，
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \begin{array}{c}\leq\\=\\\geq\end{array} b$$
$$\downarrow$$
$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \begin{array}{c}\geq\\=\\\leq\end{array} b'$$
$$b' = -b \quad (b' \geq 0)$$

- 次に制約条件に仮定を加えます．
- 制約式は決定変数の一次不等式，あるいは一次方程式の形で表されます．
- ここで，制約式の右辺 b は 0 以上，すなわち非負とします．
- b が負の制約式は両辺に -1 をかけて，不等号の向きを変えることにより，右辺が非負で等価な制約式に変換できますので，制約式の右辺 b は非負と仮定しても一般性を失いません．

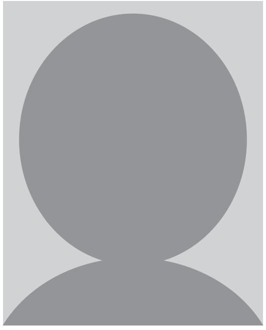
線形最適化問題の一般的な定式化

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m_11}x_1 + a_{m_12}x_2 + \cdots + a_{m_1n}x_n = b_{m_1} \\
& \vdots \\
& a_{m_21}x_1 + a_{m_22}x_2 + \cdots + a_{m_2n}x_n \geq b_{m_2} \\
& \vdots \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\
& b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, x_m \geq 0
\end{array}
$$

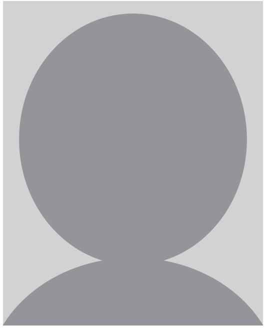
- 以上の仮定を加えると，線形最適化問題は，目的関数を最小化する問題で，制約の右辺は非負で，決定変数が非負の問題と限定することができます.
- 繰り返しになりますが，このように限定しても，最も一般的な線形最適化問題をすべて記述することができます.



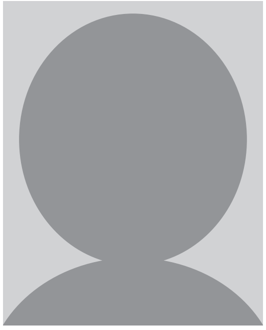
-
- 次回の講義では，線形最適化問題の代表的な解法であるシンプレックス法について説明しますが，シンプレックス法を適用する線形最適化問題は，ここで説明した仮定に加え，非負条件以外の制約は等式制約で表されます.
- 不等式制約を等式制約に変換する方法については，次回説明することにします.



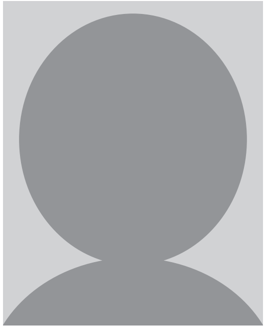
- 最後に今回のまとめです.
- 今回の講義では，線形最適化問題の定式化についてお話しました.
- 現実的な問題の例として，正確にはそのミニチュアですが，生産計画問題，食事問題，輸送問題を取り上げ，線最適化問題として定式化しました.
- それから，線形最適化問題の一般的な定式化について説明しました.
- ここまでに見てきた通り，線形最適化問題は一次式だけで記述され，使用している数学は極めて簡単なものです.



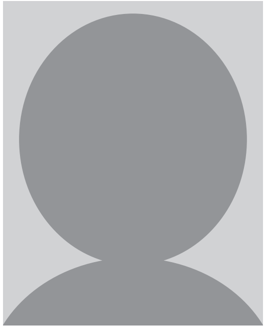
- それでも，資源やノルマに関する制約条件が課せられた下で，利益を最大化したり，コストを最小化する問題は，実際の生産，経営，政策決定等の領域に存在することから，線形最適化法は広く応用されています．
- 今回紹介できたのは，線形最適化法の応用例のうちのたった三つに過ぎませんが，この科目の線形最適化法以外の回にもしばしば線形最適化法が現れますので，
- そこでの学習を円滑にするためにも，今回の内容についてはよく復習しておいて下さい．
- 今回はこれで終わります。



- 印刷教材の演習問題も参考になるでしょうから，解答と共に参照していただきたいと思います.
- 例題や演習問題の目的関数や制約を変えたり，問題のストーリーを変えて，新たな問題を作ることも有効な学習法であると思います.



- 現実の問題は変数の数が多く，問題を解くには計算機の力を借りて解く必要があります.
- 線形最適化問題を解くためのソフトウエアは無料で利用できるものを含めてたくさんあります.
- また，Excel などの表計算ソフトウエアにも線形最適化問題を解く機能が備わっています.



- 極論すれば，問題を解くことは解法を知らなくても，計算機がやってくれますが，問題を定式化することは人間が行う必要があります．
- ですから，みなさんには問題の定式化を最優先に学習していただきたいと思います．
- もちろん，計算機を用いて実際に問題を解いてみることは，理解を深めるのに役立ちますので，それもお勧めします．
- 今回はこれで終わりにします．