線形最適化問題

線形最適化問題

数理最適化法（数理計画法）

- 与えられた制約条件の下で，評価基準（目的関数）を最適な値にするための変数の値を求める手法
- 現実の問題に広く適用が可能
- 数理的な問題解決の基礎となる手法

線形最適化問題

数理最適化問題

- 目的関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
  - 好ましさ（好ましくなさ）の評価値
- 制約条件　$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0,\ \ h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots$$

  - 制約を満たし，目的関数を最大化（最小化）する $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値を決める

線形最適化問題

線形最適化問題（線形計画問題）

- x_1, x_2が

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

を満たすとき,

$$z = x_1 + 2x_2$$

の最大値，およびその時のx_1, x_2の値を求めよ

線形最適化問題

線形最適化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{制約条件} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 48 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

生産計画問題

生産計画問題

問題

- 2種類の製品P1とP2を生産
- P1は1 kgあたり1万円の利益の見込み
- P2は1 kgあたり2万円の利益の見込み
- 利益が最大になるようにP1とP2を生産したい
- ただし，生産にあたっては次の3つの制約を満たす必要 (続く)

生産計画問題

使用原料制約

- 製品P1を1 kgの生産するのに1 kgの原料
- 製品P2を1 kg生産するのに3 kgの原料
- 1日あたりの最大使用可能量は24 kg

生産計画問題

労働時間制約

- 製品P1を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P2を1 kg生産するのにも4時間の労働時間
- 1日あたりの延べ労働時間は48時間以内

生産計画問題

機械稼働時間制約

- 製品P1を1 kg生産するのに2時間の機械稼働時間
- 製品P2を1 kg生産するのに1時間の機械稼働時間
- 機械稼働時間は1日あたり22時間以内

- 1日あたりの利益見込みが最大になる，製品P1とP2の1日あたりの生産量を決定せよ

生産計画問題

目的の定式化

- 製品P1とP2をそれぞれx_1, x_2 (kg) 生産
- x_1, x_2は決定変数
- P1は1 kgあたり1万円，P2は1 kgあたり2万円の利益見込み
- P1をx_1 (kg)，P2をx_2 (kg) 生産した時の利益見込みz (万円) は

$$z = x_1 + 2x_2$$

- zは目的関数

生産計画問題

使用原料制約の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに1 kgの原料
- 製品P2を1 kg生産するのに3 kgの原料
- P1をx_1 (kg)，P2をx_2 (kg)生産するには $x_1 + 3x_2$ (kg)の原料が必要
- 1日あたりの最大使用可能量は24 kg
- 使用原料の制約は

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

生産計画問題

労働時間制約の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P2を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P1をx_1 (kg)，製品P2をx_2 (kg)生産するには$4x_1 + 4x_2$ (時間)の労働時間が必要
- 1日あたりの延べ労働時間は48時間以内
- 労働時間に関する制約は

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

生産計画問題

機械稼働時間制約の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに2時間の機械稼働時間
- 製品P2を1 kg生産するのに1時間の機械稼働時間
- P1をx_1 (kg)，製品P2をx_2 (kg)生産するには$2x_1 + x_2$ (時間)の機械稼働時間が必要
- 機械稼働時間は22時間以内
- 機械稼働時間に関する制約は

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

生産計画問題

生産計画問題の定式化

$$
\begin{array}{rll}
\text{最大化} & z = x_1 + 2x_2 & \text{1日あたりの利益} \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 \leq 24 & \text{使用原料制約} \\
 & 4x_1 + 4x_2 \leq 48 & \text{労働時間制約} \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 22 & \text{機械稼働時間制約} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \text{非負条件}
\end{array}
$$

- 目的関数も制約条件も一次式，決定変数は連続量
  → 線形最適化問題

食事問題

食事問題

- 3種類の食品A, B, Cを組み合わせて摂取して，栄養失調にならずに食費を最小にしたい

食品A

- 1 g当たり栄養素1を30単位，栄養素2を18単位含有していて，1 g当たりの価格は75円である

食事問題

- 3種類の食品A, B, Cを組み合わせて摂取して, 栄養失調にならずに食費を最小にしたい

食品B

- 1 g当たり栄養素1を18単位，栄養素2を22単位含有していて，1 g当たりの価格は62円である

食事問題

- 3種類の食品A, B, Cを組み合わせて摂取して，栄養失調にならずに食費を最小にしたい

食品C

- 1 g当たり栄養素1を11単位，栄養素2を40単位含有していて，1 g当たりの価格は50円である

食事問題

- 3種類の食品A, B, Cを組み合わせて摂取して，栄養失調にならずに食費を最小にしたい

制約条件

- 1日当たり，栄養素1は150単位以上，栄養素2は100単位以上摂取する必要がある

問題

- 制約条件を満たし，食費を最小にする食品A, B, Cの1日当たりの摂取量を求めよ

食事問題

決定変数と目的関数の定式化

- 食品Aを x_A (g)，食品Bを x_B (g)，食品Cを x_C (g) 摂取する → x_A, x_B, x_C は決定変数
- 1 gあたりの価格は食品Aが75円，食品Bが62円，食品Cが50円
- 食品Aを x_A (g)，食品Bを x_B (g)，食品Cを x_C (g) 摂取した場合の価格 z は

$$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$$

食事問題

決定変数と目的関数の定式化

- 食品Aをx_A (g)，食品Bをx_B (g)，食品Cをx_C (g) 摂取する → x_A, x_B, x_Cは決定変数

制約を満たし，zを最小化するx_A, x_B, x_Cを求める

- 食品Aをx_A (g)，食品Bをx_B (g)，食品Cをx_C (g) 摂取した場合の価格zは

$$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$$

食事問題

栄養素1の制約の定式化

- 食品A, B, Cは栄養素1を各々 30 (単位/g), 18 (単位/g), 11 (単位/g) 含有
- 食品Aを x_A (g), 食品Bを x_B (g), 食品Cを x_C (g) 摂取した場合の栄養素1の摂取量は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C$$

食事問題

栄養素1の制約の定式化

- 食品Aをx_A (g)，食品Bをx_B (g)，食品Cをx_C (g) 摂取した場合の栄養素1の摂取量は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C$$

- 栄養素1は150単位以上必要
- 栄養素1に関する制約は

$$30x_A + 18x_B + 11x_C \geq 150$$

食事問題

栄養素2の制約の定式化

- 食品A, B, Cは栄養素2を各々 18 (単位/g), 22 (単位/g)，40 (単位/g) 含有
- 食品Aをx_A (g)，食品Bをx_B (g)，食品Cをx_C (g) 摂取した場合の栄養素2の摂取量は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C$$

食事問題

栄養素2の制約の定式化

- 食品Aをx_A (g)，食品Bをx_B (g)，食品Cをx_C (g)摂取した場合の栄養素2の摂取量は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C$$

- 栄養素1は100単位以上必要
- 栄養素2に関する制約は

$$18x_A + 22x_B + 40x_C \geq 100$$

食事問題

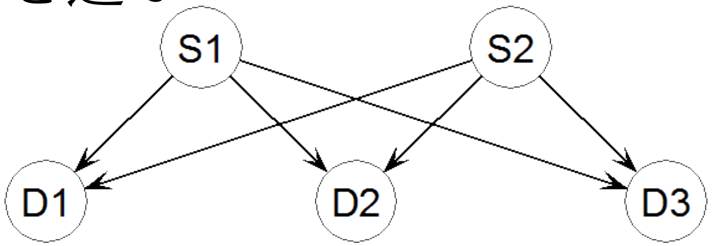
食事問題の定式化

最小化	$z = 75x_A + 62x_B + 50x_C$	価格
制約条件	$30x_A + 18x_B + 11x_C \geq 150$	栄養素1
	$18x_A + 22x_B + 40x_C \geq 100$	栄養素2
	$x_A, x_B, x_C \geq 0$	非負条件

輸送問題

輸送問題

- 送出元S1, S2から受取先D1, D2, D3に最小コストで荷物を運ぶ



輸送コスト (千円/トン)

	D1	D2	D3
S1	10	6	16
S2	8	8	10

送出量 (トン)

S1	80
S2	160

受取量 (トン)

D1	120
D2	40
D3	80

輸送問題

目的の定式化

- 送出元Siから受け取り先Djに x_{ij} (トン)輸送
- x_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$は決定変数
- 輸送コストz(千円)は

$$z = 10x_{11} + 6x_{12} + 16x_{13} + 8x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23}$$

- 輸送問題はコストzを最小化

	D1	D2	D3
S1	10	6	16
S2	8	8	10

輸送問題

送出量の制約の定式化

S1	80
S2	160

- 送出元S1からは合計80トン送出するから,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

輸送問題

送出量の制約の定式化

S1	80
S2	160

- 送出元S2からは合計160トン送出するから,

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 160$$

輸送問題

受取量の制約の定式化

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先 D1 は合計 120 トン受け取るから,

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

輸送問題

受取量の制約の定式化

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先 D2 は合計 40 トン受け取るから,

$$x_{12} + x_{22} = 40$$

輸送問題

受取量の制約

D1	120
D2	40
D3	80

- 受取先D3は合計80トン受け取るから,

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

輸送問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & z = 10x_{11} + 6x_{12} + 16x_{13} & \\
& \quad + 8x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23} & \text{輸送コスト} \\
\text{制約条件} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80 & \text{S1の送出量} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 160 & \text{S2の送出量} \\
& x_{11} + x_{21} = 120 & \text{D1の受け取り量} \\
& x_{12} + x_{22} = 40 & \text{D2の受け取り量} \\
& x_{13} + x_{23} = 80 & \text{D3の受け取り量} \\
& x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \cdots, x_{23} \geq 0 & \text{非負条件}
\end{array}
$$

線形最適化問題の一般的な定式化

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

- 決定変数を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする時，目的関数 z は決定変数の一次関数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

- z を最小化あるいは最大化

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

- 制約式は決定変数の一次不等式あるいは一次方程式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &\geq b_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

線形最適化問題の一般的な定式化

『最も』一般的な定式化

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化/最大化} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

線形最適化問題の一般的な定式化

目的関数の最小化問題に限定

$$\text{最大化}\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\downarrow$$

$$\text{最小化}\ z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

線形最適化問題の一般的な定式化

- 制約

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \begin{array}{c}\le\\=\\\ge\end{array} b$$

　において，$b \geq 0$

- $b < 0$のとき，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \begin{array}{c}\le\\=\\\ge\end{array} b$$

$$\downarrow$$

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \begin{array}{c}\ge\\=\\\le\end{array} b'$$

$$b' = -b \quad (b' \geq 0)$$

線形最適化問題の一般的な定式化

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m_11}x_1 + a_{m_12}x_2 + \cdots + a_{m_1n}x_n = b_{m_1} \\
 & \vdots \\
 & a_{m_21}x_1 + a_{m_22}x_2 + \cdots + a_{m_2n}x_n \geq b_{m_2} \\
 & \vdots \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\
 & b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, x_m \geq 0
\end{array}
$$