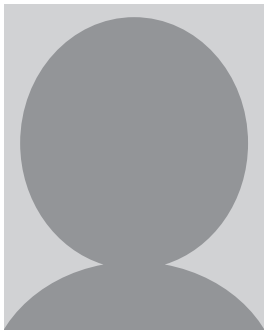
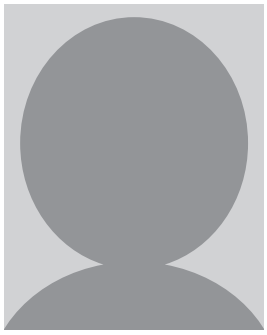
問題解決の数理（’１７）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.



-
- 今回の講義では，線形最適化法の二回目として，線形最適化問題の解法についてお話します．
- 線形最適化法の実際の問題への応用では，変数や制約の数が一万を超えるような巨大な線形最適化問題が現れますが，最適解を求めるための効率的なアルゴリズムがありますので，大型の線形最適化問題でも効率的に最適解を得ることができます．



- アルゴリズムとは、簡単に言うと、計算の手続きのことです。
- 今回は，線形最適化問題を解くアルゴリズムの中で，最も伝統的で理解しやすいシンプレックス法について解説します.
- 解法を説明する前に，前回の復習を兼ねて，生産計画問題を線形最適化問題として定式化した例を示します.

線形最適化問題

生産計画問題

- 製品 P1 を x_1 (kg)，P2 を x_2 (kg) 生産する

最大化	$z = x_1 + 2x_2$	1 日あたりの利益
制約条件	$x_1 + 3x_2 \leq 24$	使用原料制約
	$4x_1 + 4x_2 \leq 48$	労働時間制約
	$2x_1 + x_2 \leq 22$	機械稼働時間制約
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	非負条件

- 生産計画問題は，資源の制約の下で，利益見込みを最大にするように製品の生産量を決定する問題です．
- 製品 P1 を x_1 kg，P2 を x_2 kg 生産するとします．
- P1 は 1kg あたり 1 万円，P2 は 1kg あたり 2 万円の利益が見込めるとすると，P1 を x_1 kg，P2 を x_2 kg 生産したときの利益見込み z は，$z = x_1 + 2x_2$ (万円) となります．
- z は目的関数で，z を最大化する生産量 x_1, x_2 を求めます．
- 使用原料に関する制約は次のように定式化されます．
- P1 を 1 kg 生産するのに 1 kg の原料，P2 を 1 kg 生産するのに 3 kg の原料が必要だとすると，P1 を x_1 kg，P2 を x_2 kg 生産するには $x_1 + 3x_2$ kg の原料が必要です．
- 1 日あたりの原料の最大使用可能量は 24 kg であることから，使用原料の制約は，このような一次不等式で表されます．
- 労働時間に関する制約は次のように定式化されます，
- P1 を 1 kg 生産するのに 4 時間の労働時間，P2 を 1 kg 生産するのにも 4 時間の労働時間が必要で，1 日あたりの延べ労働時間は 48 時間以内とすると，労働時間に関する制約は，このような一次不等式で表されます．
- 機械稼働時間に関する制約は次のように定式化されます．
- P1 を 1 kg 生産するのに 2 時間の機械稼働時間，P2 を 1 kg 生産するのに 1 時間の機械稼働時間が必要で，機械稼働時間は 22 時間以内とすると，機械稼働時間制約はこのような一次不等式で表されます．
- 生産量は負にならないことから，非負条件も必要です．
- これで，生産計画問題を線形最適化問題として定式化できました．
-

線形最適化問題

一般的な線形最適化問題

- 最小化問題
- 制約式の右辺は非負
- 決定変数は非負

に限定しても一般性を失わない

- 前回，線形最適化問題に,「最小化問題であること」,「制約式の右辺は非負であること」,「決定変数は非負であること」を仮定するとお話しました.
- この問題は，制約式の右辺はすべて非負で，決定変数 x_1, x_2 も非負ですが，利益を最大にする最大化問題になっています.
- そこで，目的関数の係数に -1 をかけて，等価な最小化問題にします.

線形最適化問題

最小化問題版生産計画問題

最小化	$z = -x_1 - 2x_2$	1 日あたりの利益$\times(-1)$
制約条件	$x_1 + 3x_2 \leq 24$	使用原料制約
	$4x_1 + 4x_2 \leq 48$	労働時間制約
	$2x_1 + x_2 \leq 22$	機械稼働時間制約
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	非負条件

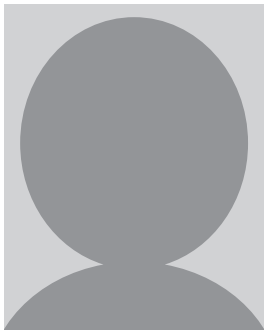
- これで等価な最小化問題に変換できました.
- 1 日当たりの利益 $\times(-1)$ の最小化問題に変換されています.
- 以降は，生産計画というカバーストーリーは不要ですので，ストーリは落とします.

線形最適化問題

最小化	$z = -x_1 - 2x_2$	目的
制約条件	$x_1 + 3x_2 \leq 24$	制約 1
	$4x_1 + 4x_2 \leq 48$	制約 2
	$2x_1 + x_2 \leq 22$	制約 3
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	非負条件

- この問題を例に，この後，線形最適化問題の解について考えていきます．

線形最適化問題の解



- これから，線形最適化問題を解くことを考えていきますが，まず線形最適化問題とその解を幾何学的に考えてみましましょう．
- 高校の数学で習った方もいるかと思いますが，幾何的なイメージがあると理解しやすいと思います．

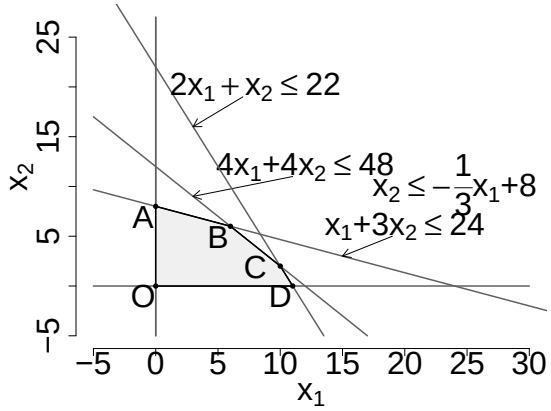
線形計画問題の解

線形計画問題

$$
\begin{array}{rll}
\text{最小化} & z = -x_1 - 2x_2 & \text{目的} \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 \leq 24 & \text{制約 1} \\
 & 4x_1 + 4x_2 \leq 48 & \text{制約 2} \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 22 & \text{制約 3} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \text{非負条件}
\end{array}
$$

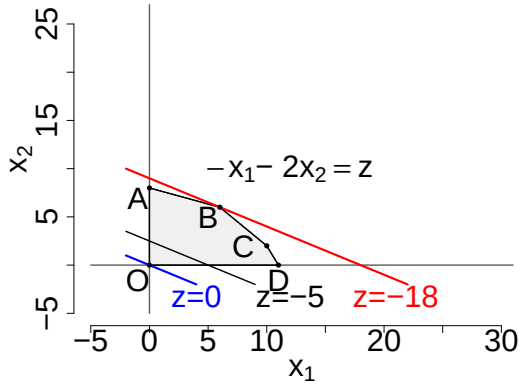
- 先ほど示しました，線形最適化問題…
- この問題の制約を図示すると，次のようになります.
- 制約は，非負条件を含めると，5 つの一次不等式からなります.

線形最適化問題の解

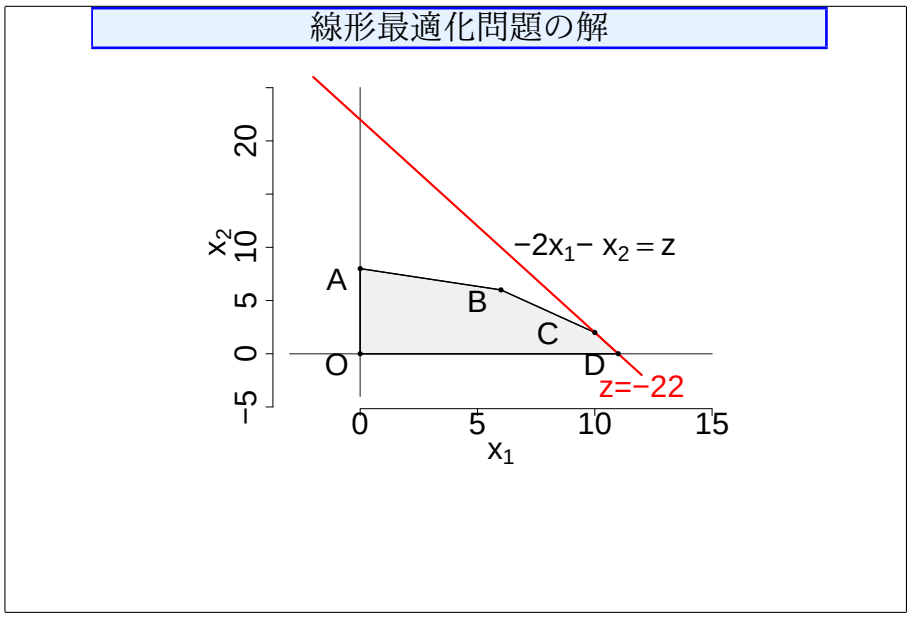


- ５つの一次不等式による制約をすべて満たす領域，すなわち実行可能領域は，五角形 OABCD に囲まれた領域です．
- 五角形の辺に相当する境界も実行可能領域に含まれます．

線形最適化問題の解



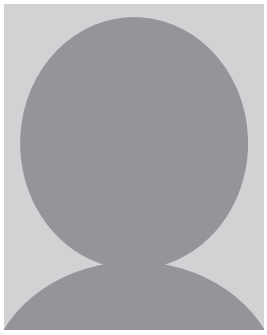
- 目的関数は，z を定数とみなすと，直線の方程式 $-x_1 - 2x_2 = z$ として表わされます．
- 実行可能領域内で，この直線上にある任意の点 x_1, x_2 に対して，$-x_1 - 2x_2$ の値は定数 z になり，この例では，x_1 切片が $-z$ の値になっています．
- 直線を上下に平行移動して z の値を変化させて，直線が実行可能領域と共通部分を持つ範囲で，z が最小になる x_1, x_2 を探すと，頂点 B の一点のみが直線と共通部分を持つ時に，z が最小になり，頂点 B の座標がこの問題の最適解になります．
- この問題では，$x_1 = 6, x_2 = 6$ の時に，z は最小値 -18 をとります．



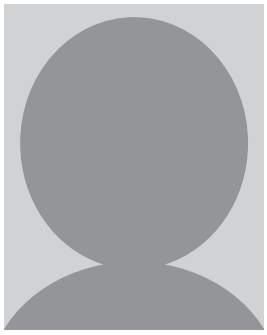
- 次の問題は，制約条件はそのままで，目的関数を $z = -2x_1 - x_2$ に変更しものです．
- 目的関数は，直線 $-2x_1 - x_2 = z$ として表わされます．
- この問題では，直線が実行可能領域と共通部分を持つ範囲で，z が最小になる x_1, x_2 を探すと，線分 CD が直線と共通部分を持つ時に，z が最小になります．
- この問題の最適解は，線分 CD 上の任意の点になります．
- 前の例では，直線が実行可能領域の頂点一点のみと共通部分を持つ時に目的関数は最小になり，最適解は一意に決まりましたが，この問題では線分 CD 上の任意の点が最適解になりました．
- この問題では，目的関数 $-2x_1 - x_2 = z$，
  これは $2x_1 + x_2 = -z$ と書き直すとより明らかになりますが，
- 制約条件の一つ，

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

  の不等号を等号に置き換えた方程式により表わされている直線と平行になっているためです．次，顔出し



- ここまでの例では，線形最適化問題の最適解は実行可能領域の多角形の頂点にありました．
- 以降，頂点のことを端点と呼ぶことにします．
- 最後の例のように，多角形の一辺上の任意の点が最適解の場合でも，端点は含まれますので，最適解は実行可能領域の端点にあると言えます．
- この性質は線形最適化問題一般に成り立ちます．



- 三変数の線形最適化問題では，制約が平面，実行可能領域は，境界面も含めて多面体の内部，最適解は多面体の頂点，端点にあります．
- 四変数以上の場合は，実行可能領域は境界麺も含めて超多面体の内部となり，最適解は超多面体の端点にあります．
- したがって，解の探索は実行可能領域 (の端点) のみを探索すればよいことになります．
- 今回紹介するシンプレックス法は，実行可能領域の端点を探索することにより解を求めます．

標準形

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + \cdots + a_{m_1 n}x_n = b_{m_1} \\
& \vdots \\
& a_{m_2 1}x_1 + a_{m_2 2}x_2 + \cdots + a_{m_2 n}x_n \geq b_{m_2} \\
& \vdots \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\
& b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, b_m \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形

- 非負条件以外の制約が等式制約

- シンプレックス法の説明に入る前に，もう少し準備を続けます．前回，線形最適化問題の一般的な定式化を示しましたが，さらにもう一つ変換を行います．
- それは，非負条件以外の制約は等式制約とする，というものです．この線形最適化問題の形式を標準形といいます．
- 不等式制約を等式制約に変換する方法を次に説明します．

標準形

スラック変数の導入

- 不等式制約

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

- スラック変数と呼ばれる非負変数 $\underline{x_3}$ を用いて

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \underline{x_3} = b$$

- まず，$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ という不等式制約を等式制約に変換します．
- そのためには，スラック変数と呼ばれる非負変数 $\underline{x_3}$ を導入して，$a_1x_1 + a_2x_2 + \underline{x_3} = b$ とすることにより，等価な等式制約に変換することができます．
- スラック変数には分かりやすいようにアンダーバーをつけていますが，他の決定変数と扱いは同じです．講義中は単に x_3 と発音します．

標準形

余裕変数の導入

- 不等式制約，
$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

- 余裕変数と呼ばれる非負変数 $\bar{x}_4$ を導入して，
$$a_1x_1 + a_2x_2 - \bar{x}_4 = b$$

- 今度は，$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ という不等式制約を等式制約に変換します．
- そのためには，余裕変数と呼ばれる非負変数 $\bar{x}_4$ を導入して，$a_1x_1 + a_2x_2 - \bar{x}_4 = b$ とすることにより，等価な等式制約に変換することができます．
- 余裕変数には分かりやすいようにバーをつけていますが，余裕変数も他の決定変数と扱いは同じです．これも単に x_4 と発音します．

標準形

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{制約条件} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 48 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 22 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

を標準形に変換

- それでは，今説明した方法を用いて，次の問題を標準形に変換してみましょう．
- この問題では，非負条件を除く 3 つの制約条件は，すべて $\leq$ の不等式制約になっていますので，スラック変数を用いて標準形に変換すると，次のようになります．

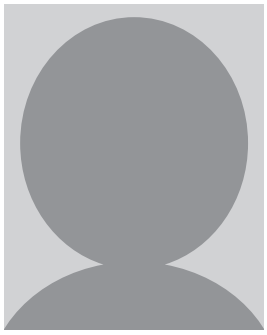
標準形

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & z = -\ x_1 - 2x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 \\
\text{制約条件} \quad & x_1 + 3x_2 + \ \underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 24 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + \ \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 48 \\
& 2x_1 + \ x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + \ \underline{x}_5 = 22 \\
& x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

- ３つの不等式制約条件は，スラック変数 $\underline{x}_3$, $\underline{x}_4$, $\underline{x}_5$ を用いて等式制約に変換されました．
- 制約式や目的関数に係数が 0 の項がありますが，このような表記にしているのは，変数が 5 つあることをより明確にするためです．
- もちろん，数学的には係数が 0 の項がなくても何も変わりません．

シンプレックス法の考え方

-
-



- 今度は標準形に変換された問題の等式制約に注目して下さい.

シンプレックス法の考え方

等式制約…連立一次方程式

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & z = -x_1 - 2x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 \\
\text{制約条件} \quad & x_1 + 3x_2 + \underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 24 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 48 \\
& 2x_1 + x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + \underline{x}_5 = 22 \\
& x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 等式制約が 3 本で変数が 5 個 … 解は一意でない
- 5 個の変数のうち 2 個を 0 とおけば解は一意

- 等式制約は 3 本の一次方程式になっています.
- これらの方程式は同時に満たされる必要があるため，連立一次方程式になります.
- 一方，変数は x_1 から $\underline{x}_5$ の 5 個あります.

シンプレックス法の考え方

基底変数，基底解

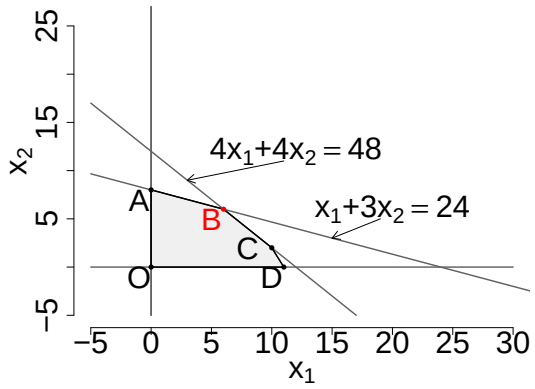
- 等式制約が 3 本で変数が 5 個 … 解は一意でない
- 5 個の変数のうち 2 個を 0 とおけば解は一意

0 とおかなかった変数	基底変数
0 とおいた変数	非基底変数
その連立方程式の解	基底解
非負条件を満たす基底解	実行可能基底解
非負条件を満たさない基底解	実行不能基底解

- 3 本の方程式で変数が 5 個ですから，この連立方程式の解は一意には決まりませんが，5 個の変数のうち 2 個を 0 とおけば連立方程式の解は一意に決まります．
- 0 とおかなかった変数のことを基底変数とよびます．
- 一方，0 とおいた変数は非基底変数とよびます．
- 5 個の変数のうち 2 個を 0 とおいた連立方程式の解を基底解とよびます．
- 非負条件を満たす基底解のことを実行可能基底解とよびます．
- 一方，非負条件を満たさない基底解のことは実行不能基底解とよびます．
- 5 つの変数のうち，どの 2 つの変数を 0 とおくかにより，基底解は変わりますが，線形最適化問題の最適解は実行可能基底解の中にあります．
- このことを幾何的に確かめてみます．

シンプレックス法の考え方

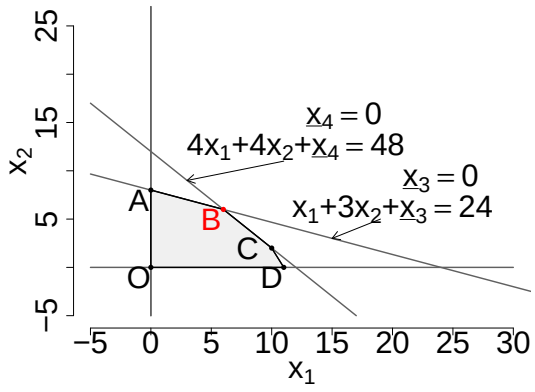
基底解



- この問題の最適解は，元の問題の 2 つの不等式制約 $x_1 + 3x_2 \leq 24$, と $4x_1 + 4x_2 \leq 48$ の不等号を等号に置き換えた，連立方程式の解になります．
- 幾何的には，2 つの方程式は各々直線を表しますから，2 本の直線の交点，すなわち端点 B になります．
- これはスラック変数を導入して，標準形に変換した等式制約，

シンプレックス法の考え方

基底解



- $x_1 + 3x_2 + \underline{x_3} = 24$, と $4x_1 + 4x_2 + \underline{x_4} = 48$ において，$\underline{x_3} = 0$, $\underline{x_4} = 0$ のときにあたります.
- すなわち，$\underline{x_3}$ と $\underline{x_4}$ が 0 ですから，非基底変数,
- 残りの $x_1, x_2, \underline{x_5}$ が基底変数になります.
- 他の端点においても同様のことが成り立ちます.
-

シンプレックス法の考え方

- 実行可能基底解（実行可能領域の端点）から，隣接する端点のうち目的関数の値を改善する端点へ移動
- 移動を繰り返し，最適解に到達

- 以上の性質を踏まえて，シンプレックス法は作られています．
- シンプレックス法は適当な実行可能基底解，すなわち実行可能領域の端点から，隣接する端点のうち目的関数の値を改善する，言い換えれば解を改善する端点へ移動することを繰り返し，最適解に到達するアルゴリズムです．

シンプレックス法の考え方

- 線形計画問題は解の逐次的な改善により
  必ず最適解に到達
- すべての実行可能基底解を試すことなく
  最適解を得る…効率的

- 線形最適化問題は，解の逐次的な改善により必ず最適解に到達するという好ましい性質を持っています．
- また，シンプレックス法はすべての実行可能基底解を試すことなく最適解を求めることができるので効率的です．
-

シンプレックス法

問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = -x_1 - 2x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 + \underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 24 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 48 \\
& 2x_1 + x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + \underline{x}_5 = 22 \\
& x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \geq 0
\end{array}
$$

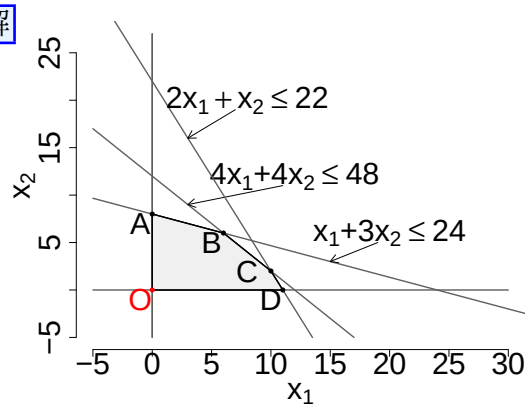
自明な実行可能基底解

$$(x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5) = (0, 0, 24, 48, 22)$$

- まず，この標準形の問題には，自明な実行可能基底解が存在します．
- すなわち，$x_1 = 0, x_2 = 0$ とおいたとき，$\underline{x}_3 = 24$, $\underline{x}_4 = 48$, $\underline{x}_5 = 22$ は明らかに実行可能基底解です．
- しかし，明らかにこの解は最適解ではありません．
- この解を初期解として，解を改善していきます．
-

シンプレックス法

（初期）基底解



- この実行可能基底解は，この図では端点 O に当たります．
- 図には 2 次元，頑張っても 3 次元しか描けませんが，実行可能領域は $x_1 \sim \underline{x}_5$ の 5 次元超多面体で囲まれた領域で，端点 O の座標は，$x_1 = 0, x_2 = 0, \underline{x}_3 = 24, \underline{x}_4 = 48, \underline{x}_5 = 22$ です．
-

シンプレックス法

初期シンプレックス・タブロー (端点 O)

	x_1	x_2	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$	
基底 $\underline{x}_3$	1	3	1	0	0	24
変数 $\underline{x}_4$	4	4	0	1	0	48
$\underline{x}_5$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

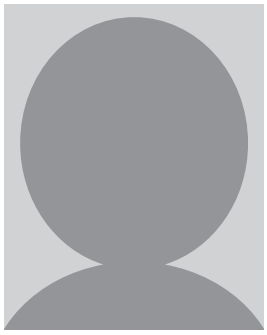
$$-z + (-x_1 - 2x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5) = 0$$

- シンプレックス法は，制約の係数と右辺の値，目的関数の係数と値を表形式で表したシンプレックス・タブロー，の操作により行うことができます．
- シンプレックス・タブローはシンプレックス表ともいいますが，ここでは単に「表」とよぶことにします．
- 等式制約に相当する部分は，$x_1 \sim \underline{x}_5$ の列に，制約式左辺の係数，一番右の列に右辺の値が示されています．
-
- まず，最初の行に注目して下さい．この行が，1 本目の等式制約，$x_1 + 3x_2 + \underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 24$ を表していることは明らかですが，
- この行の左端に基底変数 $\underline{x}_3$ というラベルがあります．
- この等式制約における基底変数 $\underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5$ の係数を見ますと，$\underline{x}_3$ の係数が 1 で，他の基底変数の係数は 0 になっています．
- 非基底変数 x_1, x_2 の値は 0 ですから，この等式制約において $\underline{x}_3$ の値は右端の値 24 であることが，表から読み取れます．
- 同様に，2 本目および 3 本目の等式制約にあたる，第 2 行および第 3 行においても，基底変数の係数は，その行のラベルに一致する基底変数の係数が 1 で，他の基底変数の係数は 0 になっています．
- つまり，表を見るだけで，各変数の値が読み取れます．
- 一番下の行は目的関数の行で，目的関数の係数と，一番右の列には初期解に対する目的関数の値が示されています．
- 気になるのは，ラベルが z でなく，$-z$ となっていることです．

- これは目的関数を移項することで，この式のように変形して，等式制約のように扱い，等式の変換を行うための表現です.
- シンプレックス・タブローの読み方が分かったところで，次に，最適解を求める手続きに移ります.
-

テロップ「基底の交換（１回目）

-
-



- シンプレックス法では，適当な実行可能基底解から，基底の交換と呼ばれる操作を繰り返して，解を改善していきます．
- それでは，１回目の基底の交換の手順を説明します．

シンプレックス法

非基底変数の選択

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	$*-2$	0	0	0	0

$$-z + (-x_1 - 2x_2 + 0\underline{x_3} + 0\underline{x_4} + 0\underline{x_5}) = 0$$

- まず，シンプレックス・タブローの $-z$ の行に注目します．
- 非基底変数 x_1, x_2 の係数は負ですから，x_1 や x_2 を増加すると，z は減少し，目的関数は改善されます．
- $-z$ の行の係数を見ると，x_1 を 1 増加させると z は 1 減少するのに対して，x_2 を 1 増加させると z は 2 減少するので，x_2 を増加させるほうが z の改善の度合いが大きく，より速く最適解に到達することが期待されます．
- 係数のみで判断しても z の改善の度合いが最大になることは保証される訳ではありませんが，比較的効率が高くなることが期待されますので，ここでは x_2 を増加させることにします．
- x_2 を増加させると z は減少しますが，制約条件がありますので，x_2 を無制限に増加させることはできません．
- そこで，次に x_2 を増加させる量を決めます．
-

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

$$x_1 + 3x_2 + \underline{x_3} = 24$$

- 現在 $\underline{x_3} = 24$
- x_2 を 1 増加させると左辺の値は 3 増加するので，等式を成立させるためには $\underline{x_3}$ を 3 減少
- 非負条件があるので，$\underline{x_3} = 0$ になるまで x_2 を増加させると，$x_2 = 24/3 = 8$

- まず， 1 本目の等式制約

$$x_1 + 3x_2 + \underline{x_3} = 24$$

に注目します．

- 現在 $\underline{x_3}$ の値は 24 です．
- x_2 を 1 増加させると左辺の値は 3 増加するので，等式を成立させるためには $\underline{x_3}$ を 3 減少させる必要があります．
- 非負条件があるので，$\underline{x_3}$ が 0 になるまで x_2 を増加させると，$x_2 = 24/3 = 8$ であることから，
- この制約を満たすには x_2 の増加は最大で 8 となります．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48	
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22	
$-z$	-1	-2	0	0	0	0	

- $\underline{x_3} = 0$ になるまで x_2 を増加させると，
  $x_2 = 24/3 = 8$

- x_2 の増加量の計算は表の上でも行うことができます．
- $\underline{x_3}$ の値が 24 で，x_2 を 1 増加させると左辺の値は 3 増加するので，$\underline{x_3}$ が 0 になるまで x_2 を増加させると，$x_2 = 24/3 = 8$ となります．
- つまり，x_2 の係数で，右辺の値を割ればいいのです．
- 表の脇に 8 と書いておきます．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48	12
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22	
$-z$	-1	-2	0	0	0	0	

- $\underline{x_4} = 0$ になるまで x_2 を増加させると，
  $x_2 = 48/4 = 12$

- 2 本目の等式制約に関しては表の上で計算しましょう．
- $\underline{x_4}$ の値が 48 で，x_2 を 1 増加させると左辺の値は 4 増加するので，$\underline{x_4}$ が 0 になるまで x_2 を増加させると，$x_2 = 48/4 = 12$ となります．
- x_2 の係数で，等式制約の右辺を割った値です．
- 表の脇に 12 と書いておきます．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48	12
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0	

- $\underline{x_5} = 0$ になるまで x_2 を増加させると，
  $x_2 = 22$

- 3 本目の等式制約に関しても表の上で計算しましょう．
- x_2 の係数 1 で，等式制約の右辺 22 をわると，$22/1 = 22$ となります．
- 表の脇に 22 と書いておきます．
-

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48	12
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0	

- 3 本の等式制約および非負条件を満たすためには，x_2 の増加は $\min\{8, 12, 22\} = 8$

- 3 本の等式制約および非負条件を満たすために，x_2 の増加量は，8, 12, 22 のうち，最も小さい増加量である 8 とします．
- x_2 が 8 になると，基底変数 $\underline{x_3}$ が 0 になります．

シンプレックス法

基底変数の交換対象の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 $\underline{x_3}$	1	*3	1	0	0	24	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48	12
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0	

- x_2 が基底変数になり，$\underline{x_3}$ が非基底変数になる
- 「x_2 が基底に入る」,「$\underline{x_3}$ が基底から出る」

- すなわち，x_2 が基底変数になり，$\underline{x_3}$ が非基底変数になります．
- このことを,「x_2 が基底に入る」,「$\underline{x_3}$ が基底から出る」ともいいます．
- シンプレックス・タブローの，基底に入る変数の列と，基底から出る変数の行の交点をピボット項と呼びます．
- ここでは，基底に入る x_2 の列と基底から出る $\underline{x_3}$ の行の交点がピボット項で，星印がつけてあります．
- ピボット項の値は 3 となっています．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1	3	1	0	0	24
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_3}$ の行 $\times 1/3$ する

- 基底の交換はピボット操作と呼ばれる操作により実現されます.
- ピボット操作の手順を説明していきます.
- まず，ピボット項のある行全体をピボット項の値で割り，新しい基底変数 x_2 の係数が 1 になるようにします.
- ピボット項の値は 3 ですから，この行全体を 3 で割ります.

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_3}$ の行 $\times 1/3$ した

- その結果，$\underline{x_3}$ のラベルのついた行，以降は単に $\underline{x_3}$ の行というように呼びますが，このようになります．
-
- 当然のことながら，x_2 の係数は 1 になっています．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	4	4	0	1	0	48
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_4}$ の行から，$\underline{x_3}$ の行 $\times 4$ を引く

- 次に，他の行の x_2 の係数が 0 になるように，各行から $\underline{x_3}$ の行に定数をかけたものを引いていきます．
- $\underline{x_4}$ の行からは，$\underline{x_3}$ の行 $\times 4$ を引きます．

シンプレックス法

ピボット操作

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{3}\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 &= 8 \quad (1)\\
4x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 &= 48 \quad (2)\\
\Downarrow & \qquad (2) - (1) \times 4\\
\tfrac{8}{3}x_1 + 0x_2 - \tfrac{4}{3}\underline{x}_3 + \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 &= 16
\end{aligned}
$$

- ちゃんと数式で書くとこのような操作になります.
- (2) 式から (1) 式 $\times 4$ を引くと，1 番下の式になります.
- これは連立一次方程式を解く操作と同じ要領です.

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_4}$ の行から，$\underline{x_3}$ の行 $\times 4$ を引いた

- この計算の結果，$\underline{x_4}$ の行はこのようになります．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	2	1	0	0	1	22
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_5}$ の行から，$\underline{x_3}$ の行を引く

- 同様に $\underline{x_5}$ の行から，$\underline{x_3}$ の行を引きますと，

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $\underline{x_5}$ の行から，$\underline{x_3}$ の行を引いた

- $\underline{x_5}$ の行はこのようになります.
-

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	-1	-2	0	0	0	0

- $-z$ の行から，$\underline{x_3}$ の行 $\times(-2)$ を引く

- $-z$ の行についても同様に，$-z$ の行から，$\underline{x_3}$ の行 $\times(-2)$ を引きます．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 $\underline{x_3}$	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- $-z$ の行から，$\underline{x_3}$ の行 $\times(-2)$ を引いた

- その結果，このようになります．
- 以上のピボット操作で，x_2 が基底に入り，$\underline{x_3}$ が基底から出ましたので，基底変数 $\underline{x_3}$ のラベルを x_2 に書き換えます．

シンプレックス法

基底の交換

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- 基底変数の係数を見ますと，ラベルと一致する基底変数の係数が 1，他の基底変数の係数が 0 となっています．
- 表を見るだけで，すべて変数の値，目的関数の値が分かります．
- すなわち，x_1 と x_3 は非基底変数なので 0，
- x_2 の値は，表の右端の列の数値で 8 です．
- 同様に $\underline{x_4}$ の値は 16，$\underline{x_5}$ の値は 14 です．
-

シンプレックス法

目的関数の改善

	x_1	x_2	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x}_4$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x}_5$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

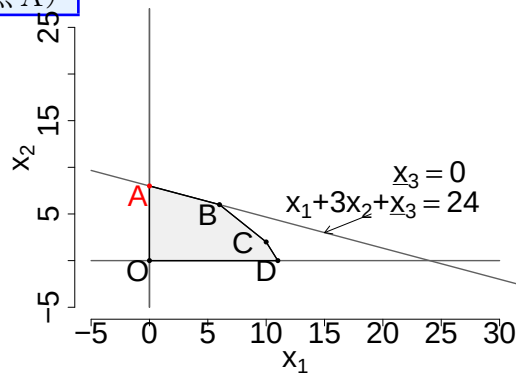
$$(x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5) = (0, 8, 0, 16, 14)$$

$$-z + (-\frac{1}{3}x_1 + 0x_2 + 2/3\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_0) = -z = 16$$

- また，$-z$ の値も同様に，表の右端の列で 16，すなわち，目的関数 z の値は -16 です．
- 目的関数の値に関しては，数式でも表現してみました．
- 式中の括弧内は，基底変数の係数がすべて 0 であるため，括弧内の値が 0 となり，表の右端の列の値が $-z$ の値となることが分かります．

シンプレックス法

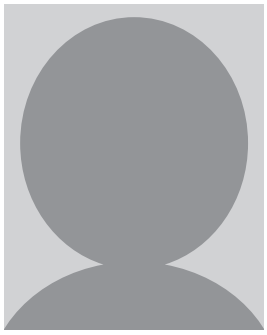
基底解（端点 A）



- 現在の基底解，$x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $\underline{x_3} = 0$, $\underline{x_4} = 16$, $\underline{x_5} = 14$ は，この図における端点 A に当たります．
- 初期解の端点 O から基底の交換により，隣接する端点 A に移ったことになります．
-

基底の交換（2回目）

-
-



-
- まだ，最適解には達しいませんので，さらに基底の交換を行います.
- 二回目の基底の交換も要領は一回目と同じです.
- それでは，実際に操作してみましょう.
-

シンプレックス法

非基底変数の選択

	x_1	x_2	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x}_4$	8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x}_5$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

$$-z + (-\frac{1}{3}x_1 + 0x_2 + \frac{2}{3}\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5) = 16$$

- まず，目的関数の改善が可能であるか，$-z$ の行を調べます．
- すると，非基底変数 x_1 の係数が $-\frac{1}{3}$ となっており，x_1 を増加させれば，目的関数の値を小さくできる，つまり改善できることが分かります．
- それでは次に，x_1 の増加量を調べます．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8	24
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16	
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14	
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16	

- $x_2 = 0$ になるまで x_1 を増加させると，
  $x_1 = 8/(1/3) = 24$

- まず，1 本目の等式制約，すなわち x_2 の行に注目します．
- x_1 を 1 増加させると，左辺の値は 1/3 増加するので，等式を成立させるためには，x_2 を 1/3 減少させる必要があります．
- 現在，x_2 の値は 8 ですから，$x_2 = 0$ になるまで x_1 を増加させると，$x_1 = 8$ 割る (3 分の 1) $= 24$ となります．
- これは，x_1 の係数 1/3 で，制約式の右辺の値 8 を割った値です．
- 表の脇に 24 と書いておきます．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8	24
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14	
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16	

- $\underline{x_4} = 0$ になるまで x_1 を増加させると，
  $x_1 = 16/(8/3) = 6$

- 次は，2 本目の等式制約，すなわち $\underline{x_4}$ の行に注目します．
- x_1 の係数 3 分の 8 で，等式制約の右辺の値 16 を割ると，6 になりますので，表の脇に 6 と書いておきます．

シンプレックス法

新たな基底変数の増加量の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8	24
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14	42/5
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16	

- $\underline{x_5} = 0$ になるまで x_1 を増加させると，
  $x_1 = 14/(5/3) = 42/5$

- 次は，3 本目の等式制約，すなわち $\underline{x_5}$ の行に注目します．
- x_1 の係数 3 分の 5 で，等式制約右辺の値 14 を割ると，5 分の 42 となりますので，表の脇に 5 分の 42 と書いておきます．

シンプレックス法

基底変数の交換対象の決定

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$		
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8	24
変数 $\underline{x_4}$	8/3	0	-4/3	1	0	16	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14	42/5
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16	

- 3 本の等式制約および非負条件を満たすためには，x_1 の増加は $\min\{24, 6, 42/5\} = 6$

- 3 本の等式制約および非負条件を満たすために，x_1 の増加量は，24, 6, 42/5 のうち，最も小さい増加量である 6 とします．
- x_1 が 6 になると，基底変数 $\underline{x_4}$ が 0 になります．
- すなわち，x_1 が基底に入り，$\underline{x_4}$ が基底から出ます．
-

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	*8/3	0	-4/3	1	0	16
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	−1/3	0	2/3	0	0	16

- $\underline{x_4}$ の行 ×3/8 する

- 基底の交換の対象が決まりましたので，次にピボット操作を行います．
- 星印のついたピボット項のある行全体をピボット項の値で割ります．
- ピボット項は $\underline{x_4}$ の行にあり，ピボット項の値は 8/3 ですから，この行全体を 8/3 で割ります．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- $\underline{x_4}$ の行 $\times 3/8$ した

- その結果，$\underline{x_4}$ の行は，このようになります．
- 当然のことながら，x_1 の係数は 1 になっています．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	1/3	1	1/3	0	0	8
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- x_2 の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(1/3)$ を 引く

- 次に，他の行の x_1 の係数が 0 になるように，$\underline{x_4}$ の行に定数をかけたものを引いていきます．
- x_2 の行からは，$\underline{x_4}$ の行 $\times(1/3)$ を引きます．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- x_2 の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(1/3)$ を 引いた

- この計算の結果，x_2 の行はこのようになります．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	5/3	0	-1/3	0	1	14
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- $\underline{x_5}$ の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(5/3)$ を引く

- 次に，$\underline{x_5}$ の行から，$\underline{x_4}$ の行 $\times(5/3)$ を引きます.

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- $\underline{x_5}$ の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(5/3)$ を引いた

-
- この計算の結果，$\underline{x_5}$ の行はこのようになります．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	$-1/3$	0	2/3	0	0	16

- $-z$ の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(-1/3)$ を引く

- $-z$ の行についても同様に，$-z$ の行から，$\underline{x_4}$ の行 $\times(-1/3)$ を引きます．

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 $\underline{x_4}$	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	0	0	1/2	1/8	0	18

- $-z$ の行から $\underline{x_4}$ の行 $\times(-1/3)$ を引いた

- その結果，このようになります．
- 以上のピボット操作で，x_1 が基底に入り，$\underline{x_4}$ が基底から出ましたので，基底変数 $\underline{x_4}$ のラベルを x_1 に書き換えます．
-

シンプレックス法

ピボット操作

	x_1	x_2	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 x_1	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x}_5$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	0	0	1/2	1/8	0	18

$$(x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5) = (6, 6, 0, 0, 4)$$

- 基底変数の係数を見ますと，ラベルと一致する基底変数の係数が 1，他の基底変数の係数が 0 となっています.
- 表を見るだけで，すべて変数の値，目的関数の値が分かります.
- すなわち，$\underline{x}_3$ と $\underline{x}_4$ は非基底変数なので 0,
- x_1 の値は，表の x_1 の行の右端の列の数値で 6,
- また x_2 の値は，x_2 の行の右端の列の数値で 6,
- 同様に $\underline{x}_5$ の値は，$\underline{x}_5$ の行の右端の列の数値で 4 です.

シンプレックス法

目的関数の改善

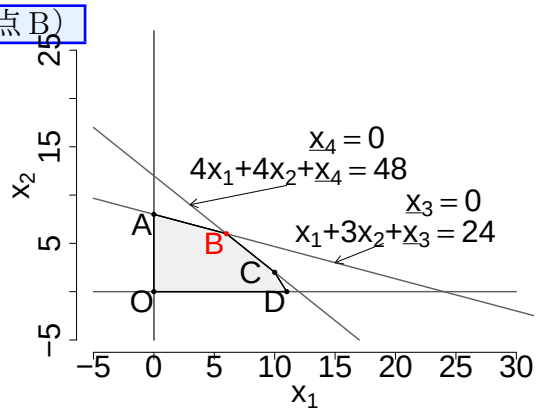
	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 x_1	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	0	0	1/2	1/8	0	18

$$-z + (0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}\underline{x_3} + \frac{1}{8}\underline{x_4} + 0\underline{x_5}) = -z = 18$$

- また，$-z$ の値も同様に，表の右端の列で 18，すなわち，目的関数 z の値は -18 です．
- 基底の交換を行う前には z の値は -16 でしたから，基底の交換により，確かに目的関数の値が改善されました．
- 目的関数の値に関しては，念のために数式でも表現してみました．
- 式中の括弧内は，基底変数の係数がすべて 0 であるため，括弧内の値が 0 となり，表の右端の列の値が $-z$ の値となることが分かります．

シンプレックス法

基底解（端点 B）



- 現在の基底解，$x_1 = 6,\ x_2 = 6,\ \underline{x_3} = 0,\ \underline{x_4} = 0,\ \underline{x_5} = 4$ は，この図における端点 B に当たります．
- 端点 A から基底の交換により，隣接する端点 B に移ったことになります．
-

シンプレックス法

計算終了

	x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$\underline{x_5}$	
基底 x_2	0	1	1/2	-1/8	0	6
変数 x_1	1	0	-1/2	3/8	0	6
$\underline{x_5}$	0	0	1/2	-5/8	1	4
$-z$	0	0	1/2	1/8	0	18

$$-z + (0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}\underline{x_3} + \frac{1}{8}\underline{x_4} + 0\underline{x_5}) = -z = 18$$

- 目的関数に負の係数なし
  → これ以上目的関数を改善できない

- さらに目的関数の値の改善が可能であるか，$-z$ の行を調べます．
- すると，係数が負の非基底変数はありませんので，これ以上目的関数の値の改善はできません．
- このことは，数式を見ると明らかです．
- したがって，現在の解が最適解で目的関数 z の最小値は -18 ということになります．
-
- 以上，シンプレックス法で最適解を求めることができました．
- 最適解のうちスラック変数の値は，制約条件に対する余裕を表しています．
- 制約条件に対する余裕は応用上，重要な意味を持っています．
- 具体的な例の方が分かりやすいので，既に取り上げた生産計画問題のストーリーをかぶせます．

シンプレックス法

最適解におけるスラック変数の値

$$
\begin{array}{rll}
\text{最小化} & z = -\ x_1 - 2x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 & \text{利益} \times (-1) \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 + \ \underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 24 & \text{使用原料} \\
& 4x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + \ \underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 = 48 & \text{労働時間} \\
& 2x_1 + \ x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + \ \underline{x}_5 = 22 & \text{機械稼働時間} \\
& x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

最適解 $(x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5) = (6, 6, 0, 0, 4)$

- スラック変数 $\underline{x}_3$ の値は 0 です．$\underline{x}_3$ は使用原料の制約において係数が 0 でないので，使用原料の制約に関わっています．
- この制約おいて，$\underline{x}_3$ が 0 であることは，使用原料 $x_1 + 3x_2$ が制約の上限である 24 になっていて，原料をこれ以上使えない，すなわち，これ以上 x_1 や x_2 の値を大きくすることができないことを意味します．
- また，原料に少しでも欠けがあると，利益を減少してしまいます．
- 同様に $\underline{x}_4$ の値も 0 ですが，これは労働時間制約において，これ以上労働時間を増やすことができないことを意味します．
- また，労働力に少しでも欠けがあると，利益を減少してしまいます．
- 一方，$\underline{x}_5$ の値は 4 です．
- 機械稼働時間制約において，$\underline{x}_5 = 4$ であることは，機械稼働時間 $2x_1 + x_2$ が $22 - 4$，すなわち 18 であることを意味します．
- つまり，機械稼働時間に関しては，制約の上限である 22 時間まで 4 時間の余裕があることを示しています．
- 4 時間分は別の作業に回したり，複数台の機械であれば機械を減らすことができます．
- また，資本を投入して，利益の増加を図る場合に，機械稼働時間のみを増やしても，使用原料や労働時間が使い尽くされているので，まったく効果はありません．
- 利益の増加を図るには，使用原料と労働時間を増やす必要があります．