Excel ソルバーによる線形計画問題の感度分析

感度分析とは

線形計画問題を定式化する際，目的関数の係数や制約の係数，右辺の値を定めなければならない．しかし，実際の問題においてはこれらの数値を正確に定めるのは難しい．例えば「利益見込み」はあくまで見込みであるし，原料価格など変動するものもある．これらの数値が少々変動しても最適解が変化しないのなら問題はないのだが，僅かな変動で最適解が変化するのであれば，その最適解を鵜呑みにして意思決定を行うのは危険である．

目的関数の係数や制約の右辺の変動に対して，最適解がどのように影響を受けるかを調べるのが感度分析である．シンプレックス法では，目的関数の係数や制約の右辺の値の一つだけの値を変化させて，最適解あるいは最適解の構造が変化しない範囲を容易に計算できる．それを利用して，目的関数の係数や制約の右辺に関して，最適解がどの程度頑健であるか，最適解をそのまま採用して良いかについて検討する．

次の生産計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & z = -2x_1 - 3x_2 & \text{1 日あたりの利益} \times(-1) \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 \leqq 24 & \text{使用原料制約} \\
 & 4x_1 + 4x_2 \leqq 48 & \text{労働時間制約} \\
 & 2x_1 + x_2 \leqq 22 & \text{機械稼働時間制約} \\
 & x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0 & \text{非負条件}
\end{array} \tag{1}
$$

別紙で説明した方法で Excel ソルバーでこの問題を解く．その際,「最適解が見つかりました。制約条件はすべて満たされました。」という表示が出たら,「解を記入する」をチェックし、「レポート」の中の「解答」「bf 感度」「条件」を選択して、「OK」ボタンを押す (図 1)。ここで必要なのは「bf 感度」で,「解答」「条件」は選択しないでも構わない．

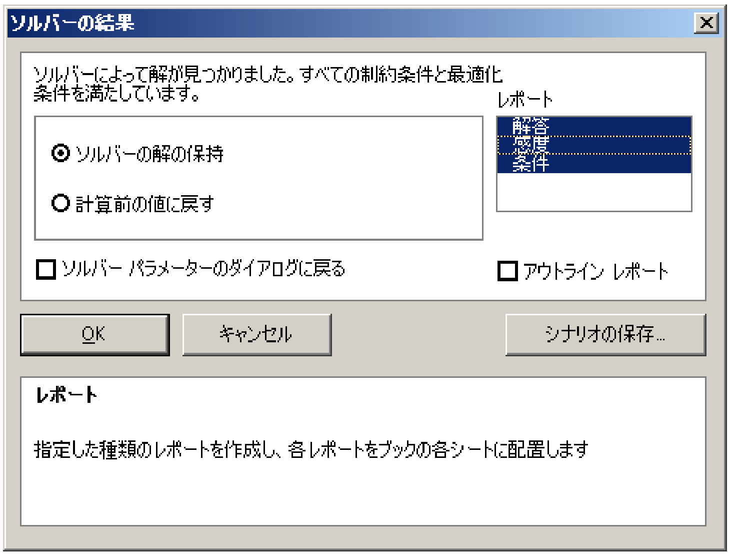
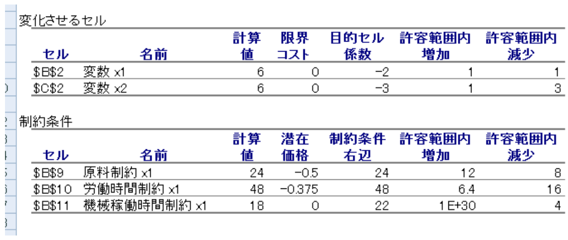


図 1

「感度レポート 1」タブを押すと，感度分析の結果が表示される (図 2)．以降は，このシートを前提に感度分析について説明する．

(注0)：「一次式と Excel で問題解決」第 1 回配布資料　※本資料は毎回持参のこと。



変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B2	変数 x1	6	0	−2	1	1
C2	変数 x2	6	0	−3	1	3

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B9	原料制約 x1	24	−0.5	24	12	8
B10	労働時間制約 x1	48	−0.375	48	6.4	16
B11	機械稼働時間制約 x1	18	0	22	1 E+30	4

図 2

目的関数の係数の変化

生産計画問題 (1) の最適解は (6, 6) で，図 3 の点 B に相当する．

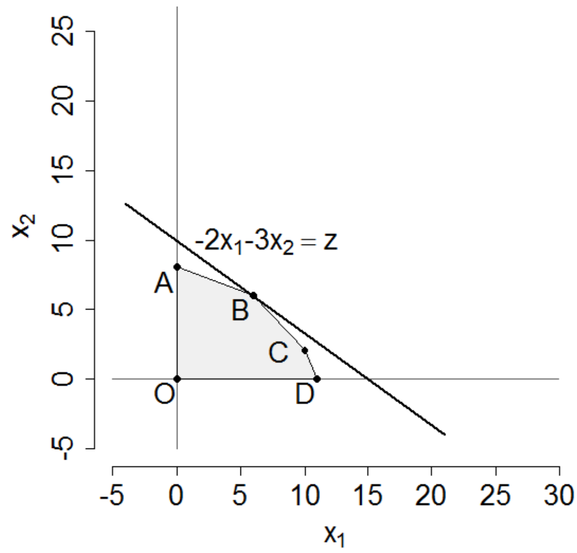


図 3　問題 (1) の最適解

問題 (1) の目的関数

$$z = -2x_1 - 3x_2$$

の x_2 の係数の値を少し変化させる．ここでは，-3 から -4 および -5 に変化させる．これらの場合，図 4 に示すように，最適解は点 B (6, 6) のまま変化しない (目的関数の値は変化する)．

今度は，目的関数の x_2 の係数の値を -3 から -1 に変化させる．すると，図 5 に示すように，最適解が点 D (11, 0) に変化する．

目的関数の x_2 の係数の値を変化させても最適解が変化しない範囲は「感度レポート」を見ると分かる (図 6)．目的関数の x_2 の係数は -3 である．これは「目的セル係数」の変数 x2 の欄を見れば分かる.「許容範囲内増加」「許容範囲内減少」の変数 x2 の欄は各々1, 3 となっている．これは，目的関数の x_2 の係数は $-3-3=-6$ から $-3+1=-2$ の間では，最適解は (6, 6) のまま変化しないということを意味する．

同様に，目的関数の x_1 の係数は $-2-1=-3$ から $-2+1=-1$ の間で変化させても，最適解は (6, 6) のまま変化しない．

制約式の右辺の変化

問題 (1) を標準形にすると，(2) となる．

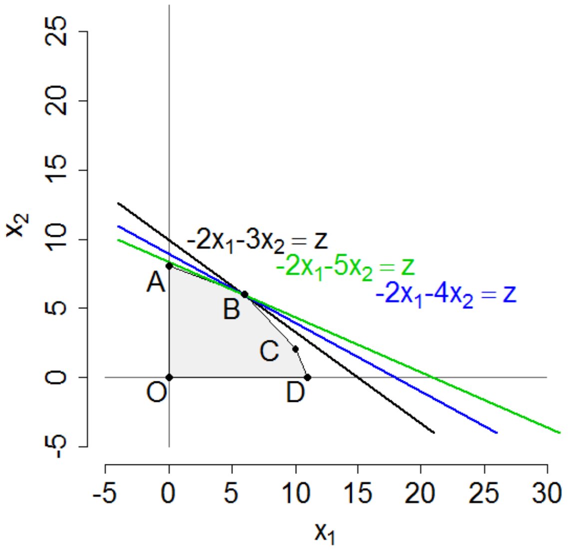


図 4　問題 (1) の目的関数の係数を変化させた場合 (1)

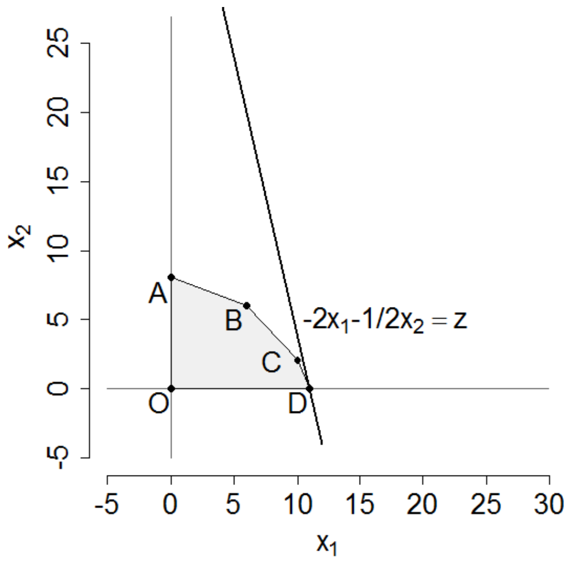


図 5　問題 (1) の目的関数の係数を変化させた場合 (2)

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B2	変数 x1	6	0	−2	1	1
C2	変数 x2	6	0	−3	1	3

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B9	原料制約 x1	24	−0.5	24	12	8
B10	労働時間制約 x1	48	−0.375	48	6.4	16
B11	機械稼働時間制約 x1	18	0	22	1 E+30	4

図 6　問題 (1) の目的関数の係数を変化させて最適解が変化しない範囲

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & z = -2x_1 - 3x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 & \text{1 日あたりの利益} \times (-1) \\
\text{制約条件} & x_1 + 3x_2 + \underline{x}_3 = 24 & \text{使用原料制約} \\
 & 4x_1 + 4x_2 + \underline{x}_4 = 48 & \text{労働時間制約} \\
 & 2x_1 + x_2 + \underline{x}_5 = 22 & \text{機械稼働時間制約} \\
 & x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \geqq 0 & \text{非負条件}
\end{array}
\tag{2}
$$

この問題の最適解 $(6,6)$ で，使用原料制約は上限の 24，労働時間制約は上限の 48，機械稼働時間制約は上限の 22 より 4 小さい 18 である．すなわち，$(x_1, x_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5) = (6,6,0,0,4)$ で，基底変数は $x_1, x_2, \underline{x}_5$ である．

労働時間制約

$$4x_1 + 4x_2 \leqq 48$$

に注目する．最適解では労働時間制約の上限である 48 時間の労働時間を使用する．もし，労働時間を増やすことができれば，さらに利益を上げることができる可能性がある．ここでは，労働時間制約の右辺の値 48 を 52 に増加してみる．すると，最適解は $(7.5, 5.5)$ に変化し，目的関数の値は -30 から -32.4 に変化する (図 7 では元の問題の最適解 B から B' に最適解が変化)．すなわち，労働時間を 48 時間から 52 時間に増加すると，利益が 30 から 32.4 に増加する．

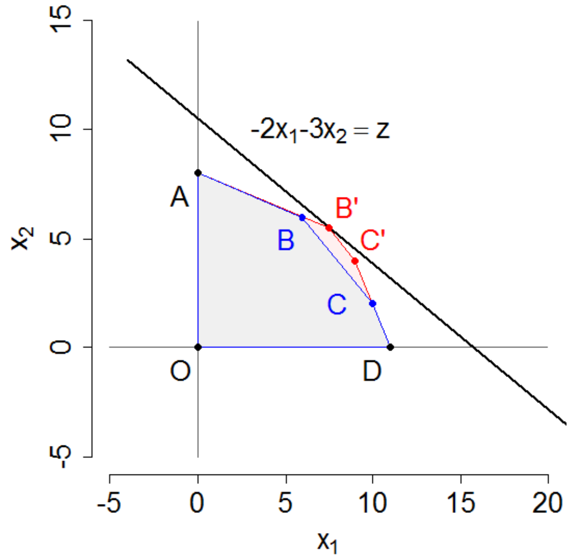


図 7　問題 (1) の制約の右辺の値を変化させた場合

ただし，基底変数は $x_1, x_2, \underline{x}_5$ のままで，その意味で最適解の構造は変化していない．労働時間制約の右辺の値を変化させても最適解の構造が変化しない範囲は「感度レポート」を見ると分かる (図 5)．

労働時間制約の右辺の値は 48 である．これは「制約条件右辺」の「労働時間制約」の欄を見れば分かる．「許容範囲内増加」「許容範囲内減少」は各々6.4, 16 となっている．これは，労働時間制約の右辺の値は $48 - 16 = 32$ から $48 + 6.4 = 54.4$ の間では，最適解の基底変数は $x_1, x_2, \underline{x}_5$ のままで変化しないということを意味する．同様に，原料制約の右辺の値は $24 - 8 = 16$ から $24 + 12 = 36$ の間では，最適解の基底変数は $x_1, x_2, \underline{x}_5$ のままで変化しない．

機械稼働時間制約は上限の 22 より 4 小さい 18 である．すなわち，機械稼働時間は余っている．そのため，機械稼働時間の上限を増加しても目的関数の値は増加しない．機械稼働時間制約の「許容範囲内増加」は $1E + 30$ とある．$1E + 30$ とは 1.0×10^{30} のことで，Excel では無限大と解釈できる．すなわち，機械稼働時間を 22 からどれだけ増やしても最適解の構造は変化しない．一方，「許容範囲内減少」は 4 で，右辺の値を 18 とすると，最適解において機械稼働時間は制約の上限である 18 となる．機械稼働時間の上限を 18 よりさらに小さくすると，最適解の構造が変化する．

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B2	変数 x1	6	0	−2	1	1
C2	変数 x2	6	0	−3	1	3

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B9	原料制約 x1	24	−0.5	24	12	8
B10	労働時間制約 x1	48	−0.375	48	6.4	16
B11	機械稼働時間制約 x1	18	0	22	1E+30	4

図 8　問題 (1) の目的関数の係数を変化させて最適解が変化しない範囲