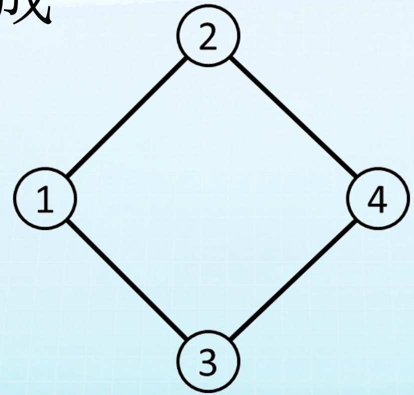
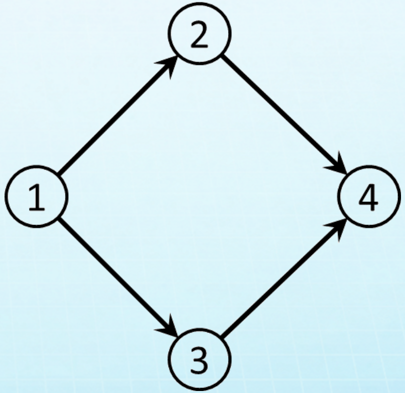
ネットワーク

◆グラフ

- 点と枝により構成
- 方向性の有無



無向グラフ

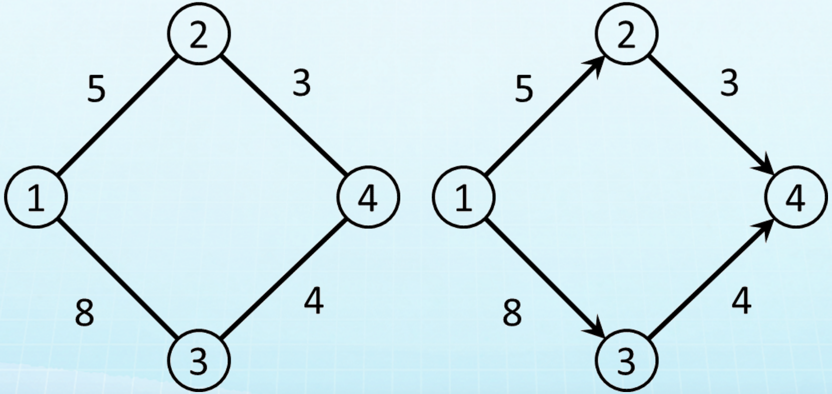


有向グラフ

ネットワーク

◆重み付きグラフ

- グラフには重みを与えることができる



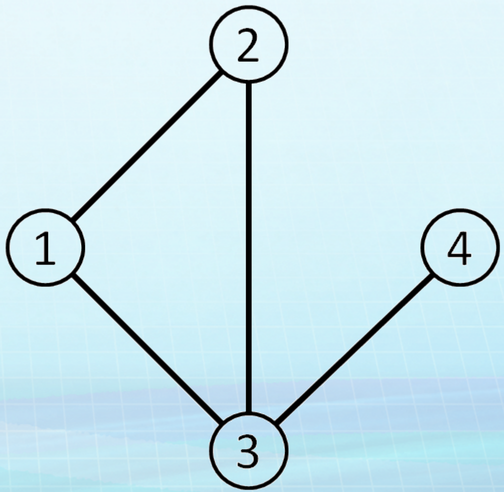
無向グラフ　　有向グラフ

ネットワーク

◆グラフ

- 点iと点jを結ぶ枝(i,j)
- 点の集合V，枝の集合E
- グラフ$G=(V,E)$

$$V=\{1,2,3,4\},$$
$$E=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$$



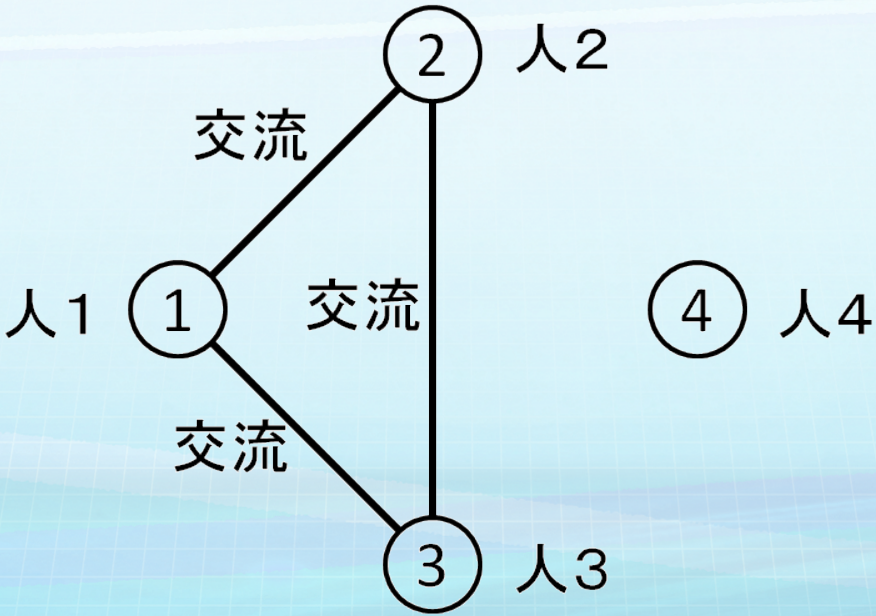
ネットワーク

◆グラフネットワーク

- グラフによりネットワーク構造を持つシステムを表現
- 点は対象や事象
- 枝は点間の接続関係

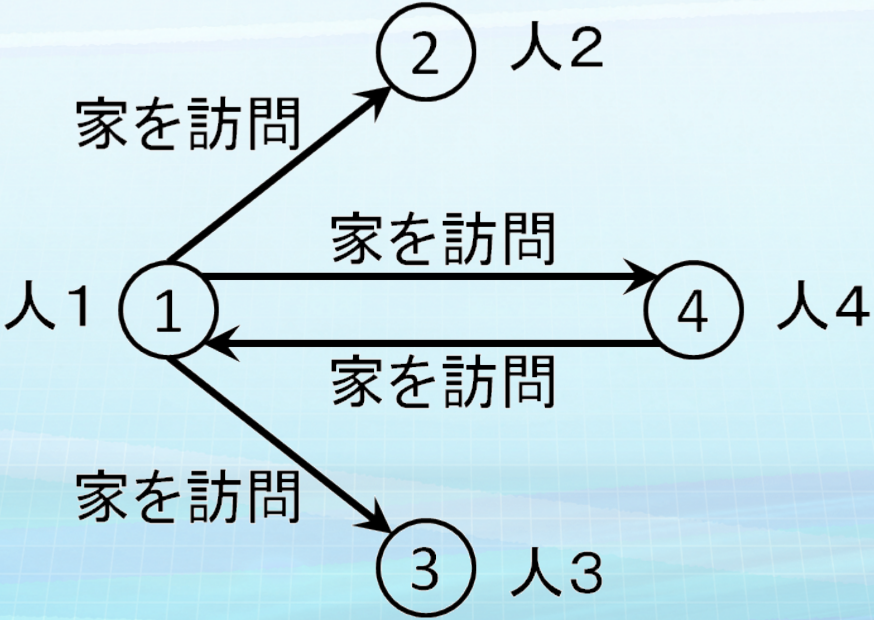
ネットワーク

◆無向グラフによるネットワーク表現



ネットワーク

◆有向グラフによるネットワーク表現



ネットワーク

◆交通網

- 点で地点（交差点，駅）
- 枝で道路，運行
- 枝の重みで
  - 地点間の距離
  - 地点間の所要時間
  - 地点間の料金

ネットワーク

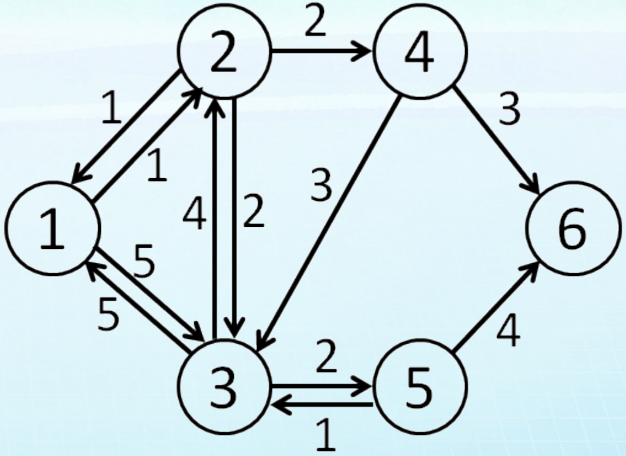
◆情報通信

- 点で端末
- 枝で接続
- 重みで
  - 帯域幅
  - コスト
  - 遅延

最短路問題

最短路問題

- 点は地点，枝は道路，重みは枝で結ばれた地点間の距離
- 地点1から地点5に最短で移動する経路を求める



最短路問題

◆最短路問題の応用

- カーナビゲーション・システム
  - 最短経路の発見
- 鉄道路線の乗り換え案内
  - 所要時間最短
  - 運賃最安
  - 乗換回数最少
  - 通信ネットワークの経路制御

最短路問題

◆決定変数

- 枝(i, j): 地点iと地点jを結ぶ道路
- 決定変数x_{ij}: 枝$(i, j) \in E$を最短路に含めるか否か
- (i, j)を最短路に

$$
\begin{array}{rl}
\text{含める} & x_{ij} = 1 \\
\text{含めない} & x_{ij} = 0
\end{array}
$$

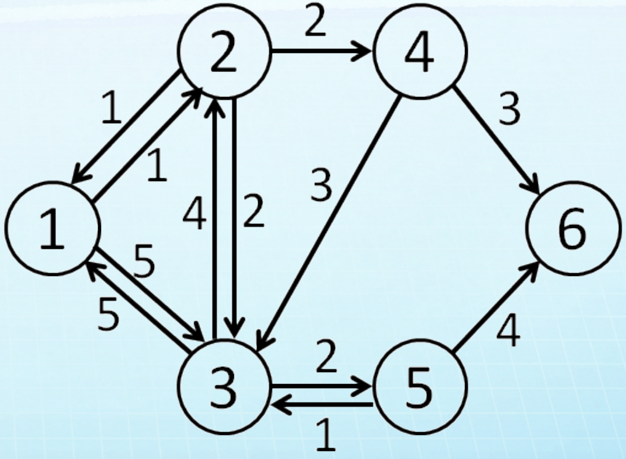
最短路問題

◆目的関数の定式化

- w_{ij}: (i,j)間の距離
- z: 移動距離

$$z = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} x_{ij}$$

- zを最小化するx_{ij}の値を決定

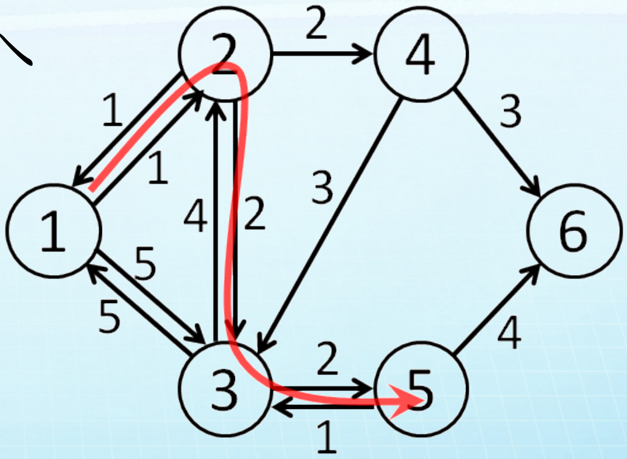


最短路問題

◆始点（出発地点）の制約の定式化

- 出発地点sでは，他の1地点へ出るだけで，他の地点からは入らない

$$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = 1$$

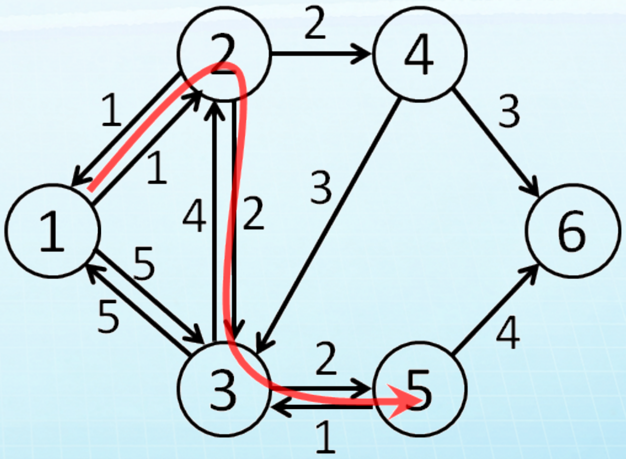


最短路問題

◆終点（到着地点）の制約の定式化

- 到着地点tでは，
  他の1地点から入るだけで，
  他の地点に出ない

$$\sum_{(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in E} x_{jt} = -1$$

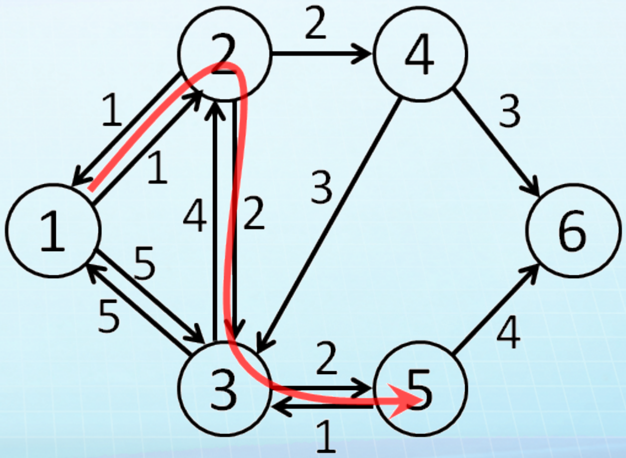


最短路問題

◆出発地点と到着地点以外の地点の制約の定式化

- 各地点 i (s, t 以外)
- 他の1地点から入って
  別の1地点に出る
- その地点を通らない

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0$$



最短路問題

最小化 $z = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij}$ 移動距離

制約条件 $\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = 1$ 始点sの出入

$\sum_{(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in E} x_{jt} = -1$ 終点tの出入

$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0$ その他地点の出入

$\underline{x_{ij} \in \{0,1\}}$ for $(i,j) \in E$ $\underline{x_{ij}\text{は}0\text{か}1}$

最短路問題

最小化	$z = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij}$	移動距離
制約条件	$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = 1$	始点sの出入
	$\sum_{(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in E} x_{jt} = -1$	終点tの出入
	$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0$	その他地点の出入
	$\underline{x_{ij} \geq 0}$ for $(i,j) \in E$	x_{ij}の非負条件

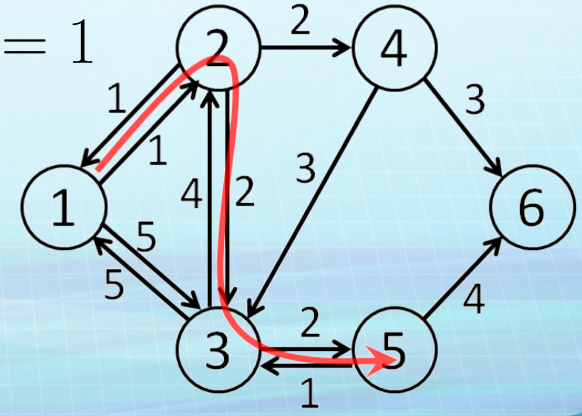
最短路問題

最小化 $z = x_{12} + 5x_{13} + x_{21} + 2x_{23} + 2x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 2x_{35} + 3x_{43} + 3x_{46} + x_{53} + 4x_{56}$

制約条件

始点(点1) $(x_{12} + x_{13}) - (x_{21} + x_{31}) = 1$

終点(点5) $(x_{53} + x_{56}) - x_{35} = -1$



最短路問題

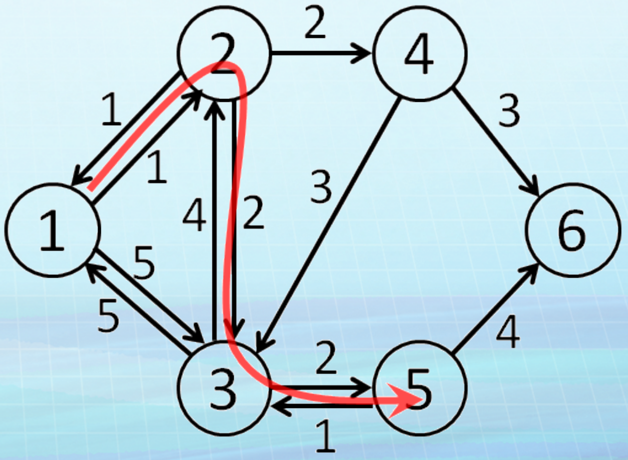
点2 $(x_{21} + x_{23} + x_{24}) - (x_{12} + x_{32}) = 0$

点3 $(x_{31} + x_{32} + x_{35}) - (x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}) = 0$

点4 $(x_{43} + x_{46}) - x_{24} = 0$

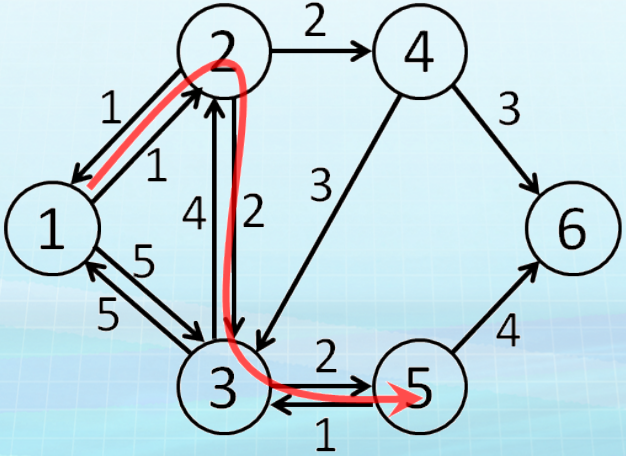
点6 $-(x_{46} + x_{56}) = 0$

$x_{ij} \geq 0 \text{ for } (i, j) \in E$



最短路問題

- この問題の最適解
  $x_{12}, x_{23}, x_{35} = 1$，他の $x_{ij} = 0$
- 経路 $1 \to 2 \to 3 \to 5$ が最短路



ダイクストラ法

ダイクストラ法

- 最短路問題を効率良く解くアルゴリズム
- 最短路

  $1 \to 2 \to 3 \to 5$

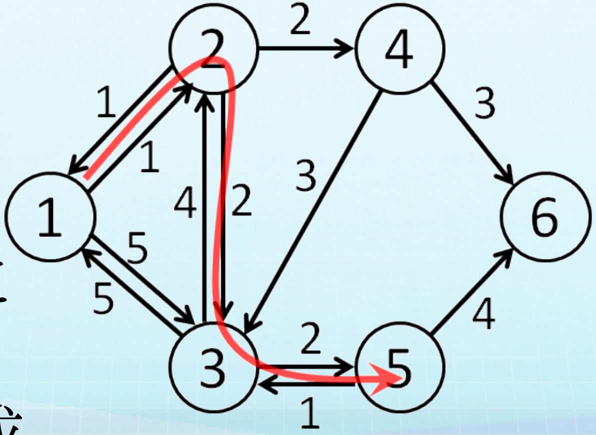
  の部分もその

  区間の最短路

- 始点から始点に

  近い地点までの

  最短路を順次構成



$$\underbrace{1 \to 2 \to 3 \to 5}_{1\text{から}5\text{までの最短路}}$$

$$\underbrace{1 \to 2 \to 3}_{1\text{から}3\text{までの最短路}}$$

$$\underbrace{1 \to 2}_{1\text{から}2\text{までの最短路}}$$

ダイクストラ法

0. 初期化

$S \leftarrow \{\}$, $N \leftarrow V$, $d(s) \leftarrow 0$,

$d(i) \leftarrow \infty \ \ (i \in V \backslash \{s\})$

S: 最短路が確定した点の集合

N: 最短路が確定しない点の集合

$(N = V \backslash S)$

$d(i)$: 始点 s から点 i までの暫定最短距離

ダイクストラ法

1. if $S = V$ **then** 終了
else $d(v) \leftarrow \min\{d(i) | i \in N\}$ である点 v を選ぶ

- すべての点への最短路が確定したら $(S = V)$ 終了
- 未確定の点があれば，未確定の点の集合 N から，$d(i)$ が最小になる点を選ぶ (点 v とする)

ダイクストラ法

2. $S \leftarrow S \cup \{v\}$, $N \leftarrow N \backslash \{v\}$
$(v, j) \in E$ かつ $j \in N$ である枝 (v, j) に対して，
$d(j) > d(v) + w_{vj}$ ならば $d(j) \leftarrow d(v) + w_{vj}$,
$p(j) \leftarrow v$ として (1) に戻る

- v への最短路は確定→ v を N から S へ移す
- v から直接つながっている N 内の点に対して，
  v 経由の方が距離が短ければ，経路を v 経由に変更

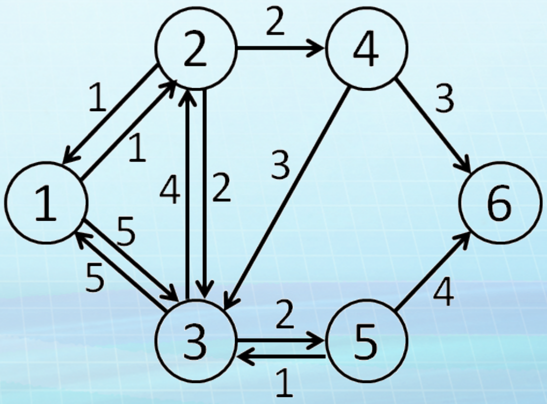
※ $p(j)$: s から点 j までの最短路における j の直前の点

ダイクストラ法

◆（０）

$$S \leftarrow \{\},\ N \leftarrow \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$d(1) \leftarrow 0,$$
$$d(2), d(3), d(4), d(5), d(6) \leftarrow \infty$$



ダイクストラ法

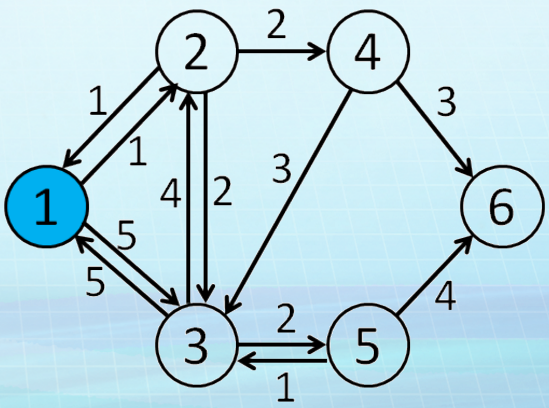
◆１回目（１）

$$S = \{\},\ N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$d(1) = 0,$$
$$d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = \infty$$

$$\min\{d(1), d(2), d(3), d(4), d(5), d(6)\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

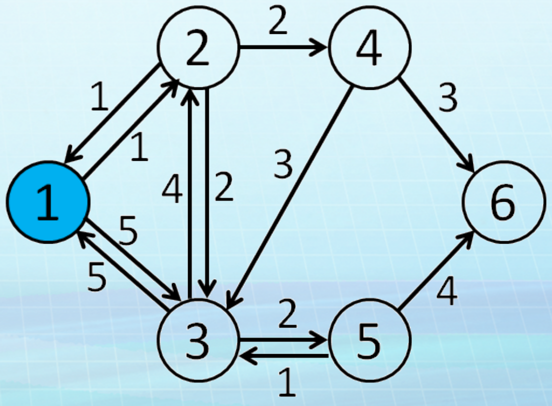
より $v = 1$



ダイクストラ法

◆１回目（２）

$$S \leftarrow \{1\},\ N \leftarrow \{2,3,4,5,6\}$$



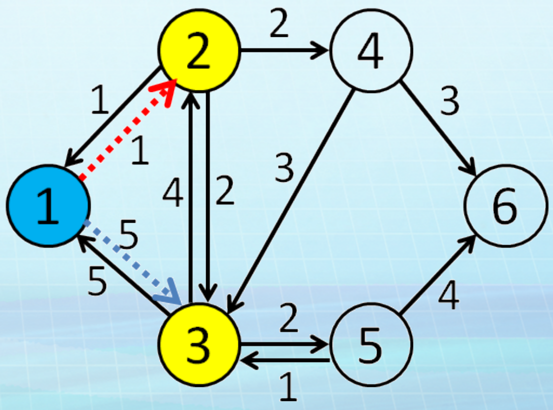
ダイクストラ法

◆１回目（２）

$$S = \{1\},\ N = \{2,3,4,5,6\}$$

$$d(2) = \infty > d(1) + w_{12} = 0 + 1 = 1$$
$$\rightarrow d(2) \leftarrow 1,\ p(2) \leftarrow 1$$

$$d(3) = \infty > d(1) + w_{13} = 0 + 5 = 5$$
$$\rightarrow d(3) \leftarrow 5,\ p(3) \leftarrow 1$$



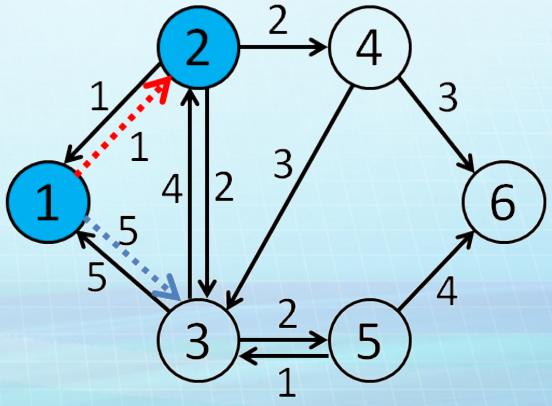
ダイクストラ法

◆２回目（１）

$S = \{1\},\ N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$d(2) = 1,\ d(3) = 5,$
$d(4) = d(5) = d(6) = \infty$

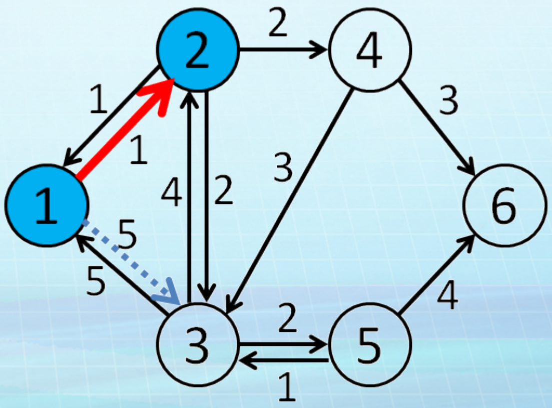
$\min\{d(2), d(3), d(4), d(5), d(6)\}$
$= \min\{1, 5, \infty, \infty, \infty\} = 1$
より $v = 2$



ダイクストラ法

◆２回目（２）

$$S \leftarrow \{1,2\},\ N \leftarrow \{3,4,5,6\}$$

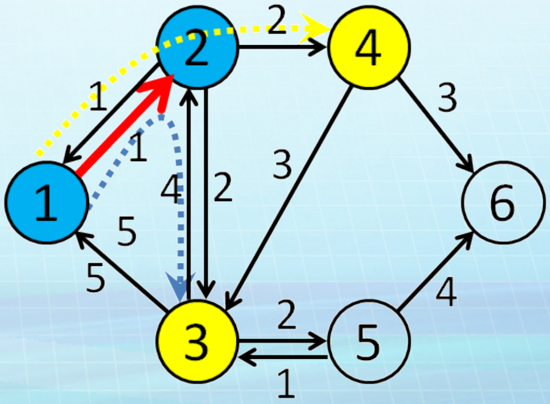


ダイクストラ法

◆２回目（２）

$$S = \{1, 2\},\ N = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$d(3) = 5 > d(2) + w_{23} = 1 + 2 = 3$$
$$\to d(3) \leftarrow 3,\ p(3) \leftarrow 2$$
$$d(4) = \infty > d(2) + w_{24} = 1 + 2 = 3$$
$$\to d(4) \leftarrow 3,\ p(4) \leftarrow 2$$



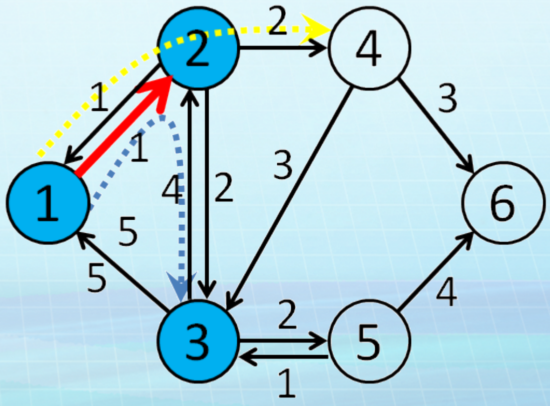
ダイクストラ法

◆３回目（１）

$S = \{1, 2\},\ N = \{3, 4, 5, 6\}$

$d(3) = 3, d(4) = 3,$
$d(5) = d(6) = \infty$

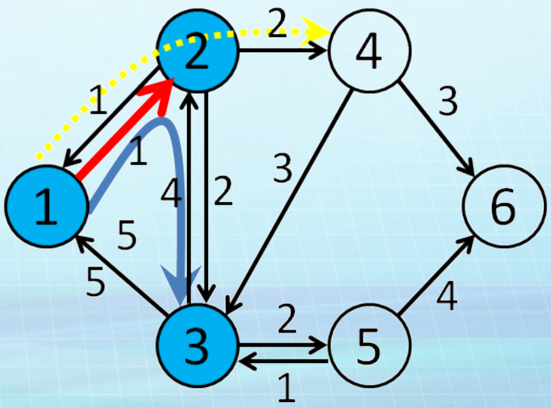
$\min\{d(3), d(4), d(5), d(6)\}$
$= \min\{3, 3, \infty, \infty\} = 3$
より $v = 3$ ($v = 4$ でもよい)



ダイクストラ法

◆３回目（２）

$$S \leftarrow \{1, 2, 3\},\ N \leftarrow \{4, 5, 6\}$$

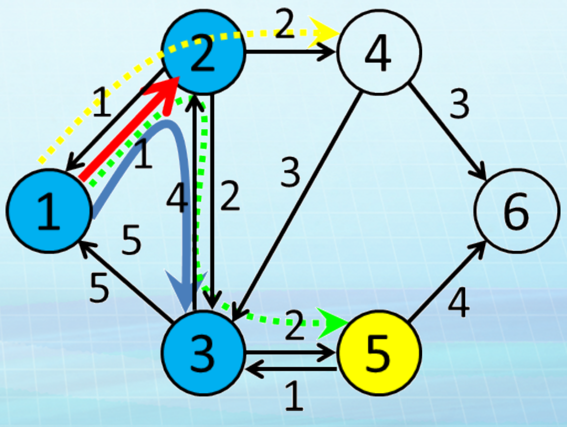


ダイクストラ法

◆３回目（２）

$$S = \{1, 2, 3\},\ N = \{4, 5, 6\}$$

$$d(5) = \infty > d(3) + w_{35} = 3 + 2 = 5$$
$$\rightarrow d(5) \leftarrow 5,\ p(5) \leftarrow 3$$



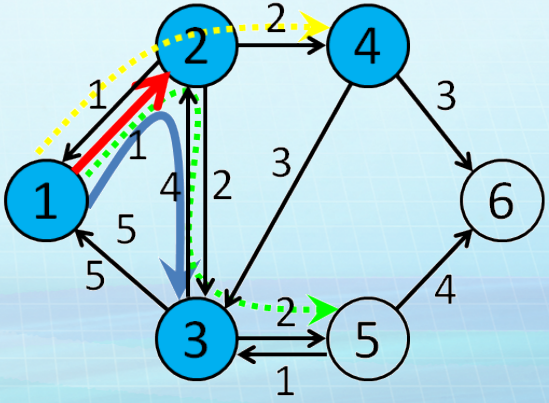
ダイクストラ法

◆４回目（１）

$S = \{1, 2, 3\},\ N = \{4, 5, 6\}$

$d(4) = 3, d(5) = 5$
$d(6) = \infty$

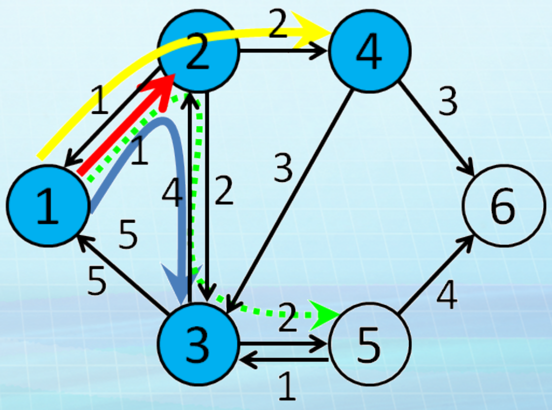
$\min\{d(4), d(5), d(6)\}$
$= \min\{3, 5, \infty\} = 3$
より $v = 4$



ダイクストラ法

◆４回目（２）

$$S \leftarrow \{1, 2, 3, 4\},\ N \leftarrow \{5, 6\}$$

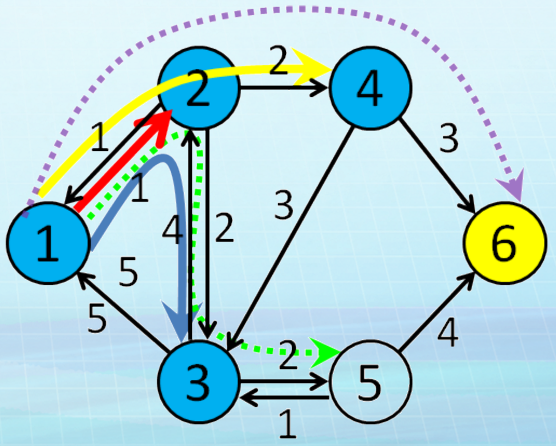


ダイクストラ法

◆４回目（２）

$S = \{1, 2, 3, 4\},\ N = \{5, 6\}$

$d(6) = \infty > d(4) + w_{46} = 3 + 3 = 6$
$\rightarrow d(6) \leftarrow 6,\ p(6) \leftarrow 4$



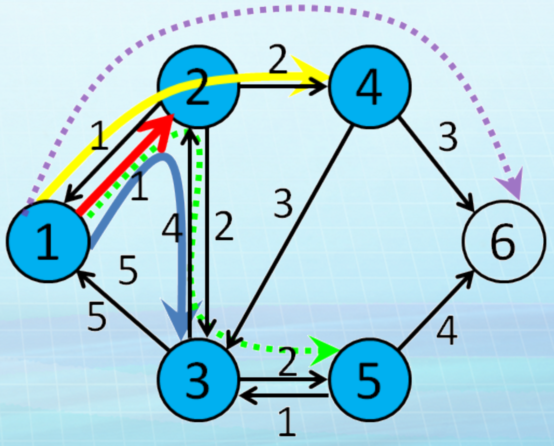
ダイクストラ法

◆５回目（１）

$S = \{1, 2, 3, 4\},\ N = \{5, 6\}$

$d(5) = 5$
$d(6) = 6$

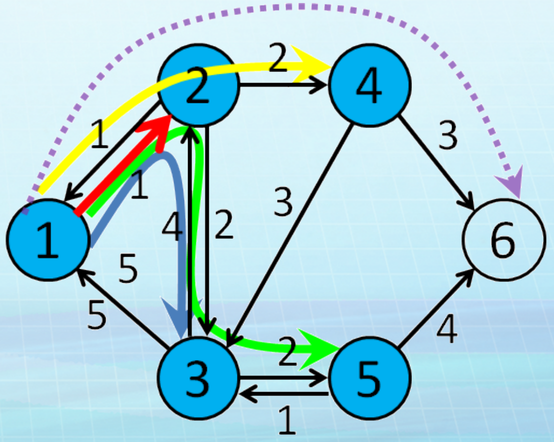
$\min\{d(5), d(6)\} = \min\{5, 6\} = 5$
より $v = 5$



ダイクストラ法

◆５回目（２）

$$S \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5\},\ N \leftarrow \{6\}$$

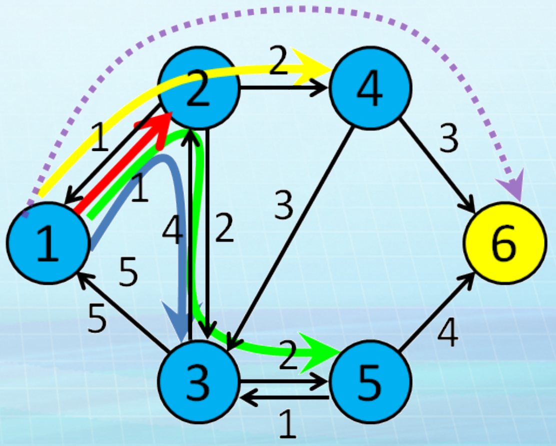


ダイクストラ法

◆５回目（２）

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ N = \{6\}$

$d(6) = 6 < d(5) + w_{56} = 5 + 4 = 9$
$\rightarrow d(6) = 6,\ p(6) = 4$のまま



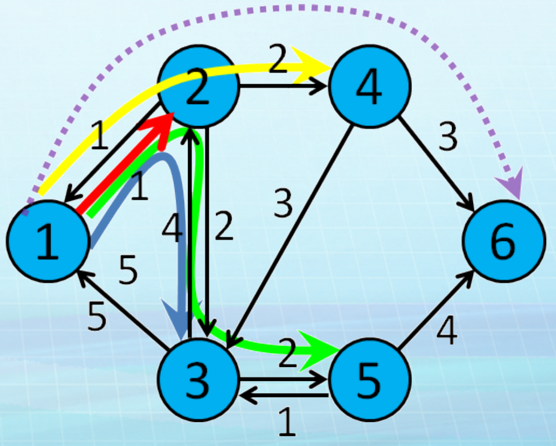
ダイクストラ法

◆６回目（１）

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ N = \{6\}$

$d(6) = 6$

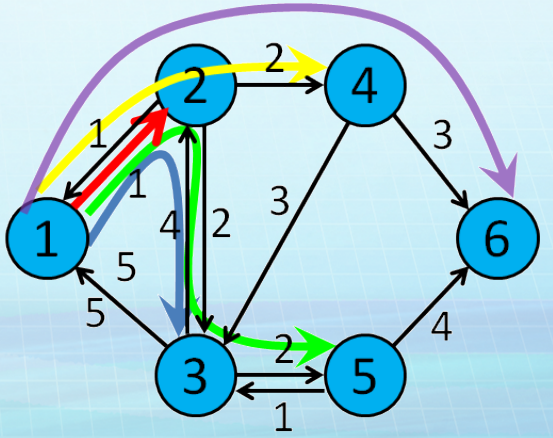
$\min\{d(6)\} = \min\{6\} = 6$
より $v = 6$



ダイクストラ法

◆６回目（２）

$$S \leftarrow \{1,2,3,4,5,6\},\ N \leftarrow \{\}$$

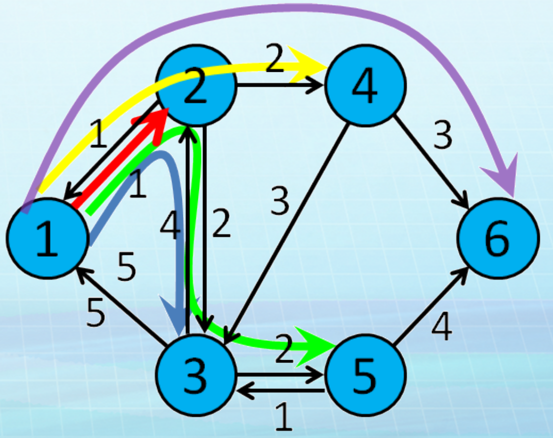


ダイクストラ法

◆７回目（１）

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ N = \{\}$

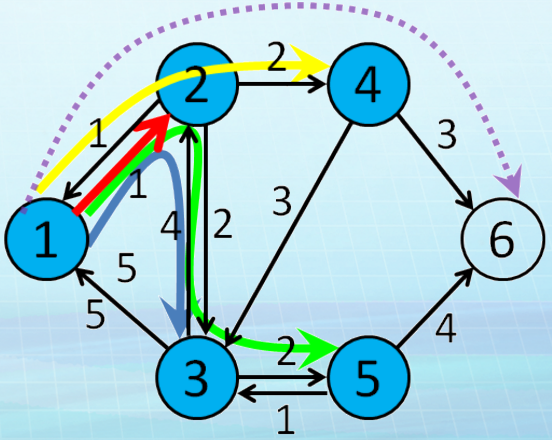
$S = V$ なので終了



ダイクストラ法

- 点6への最短路
- $d(6) = 6$なので距離は6
- $p(6) = 4,\ p(4) = 2,$
  $p(2) = 1$なので,

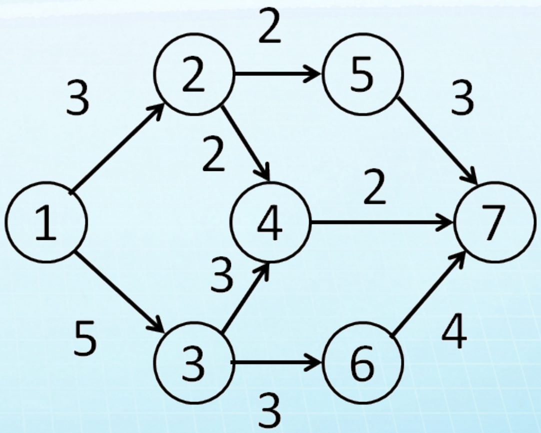
$$6 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 1$$
$$\Downarrow$$
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$



最大流問題

最大流問題

- 点は地点，枝は通路，重みは通路の容量（流量の最大値，単位時間に通れる人数）
- 地点1に客が集まっていて，出口は地点7
- 最も多く出口に客を送り出すよう客を誘導

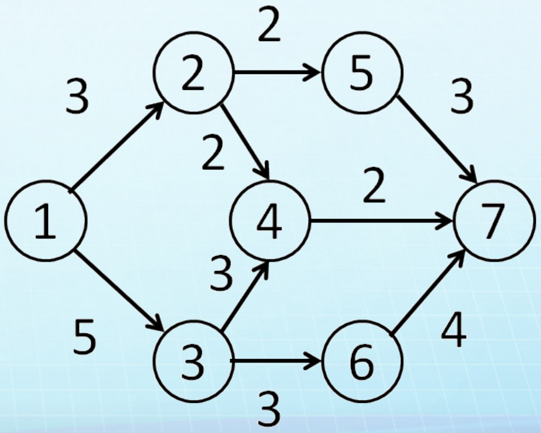


最大流問題

- 点の集合をV，枝の集合をE,
- 枝(i,j)の枝(i,j)の流量をx_{ij}
  容量をu_{ij}
- 流量fは，始点sおよび終点t
  の流量に等しい

$$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = f$$

$$\sum_{(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in E} x_{jt} = -f$$



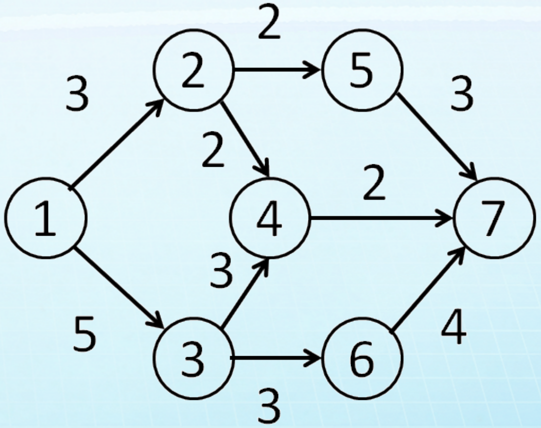
最大流問題

- 他の点$i \in V \backslash \{s,t\}$においては，点に入る流量と，点から出る流量が等しい

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0$$

- 各枝の流量x_{ij}は容量u_{ij}以下

$$x_{ij} \le u_{ij} \;\; (i,j) \in E$$



最大流問題

最大化 f 　流量

制約条件

$$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = f \qquad \text{始点}\, s$$

$$\sum_{(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in E} x_{jt} = -f \qquad \text{終点}\, t$$

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0 \qquad i \in V \backslash \{s,t\}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \text{ for } (i,j) \in E \qquad \text{容量制約}$$

最大流問題

最大化 $f = \sum_{(s,j)\in E} x_{sj}$ 流量

制約条件 $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0 \quad i \in V\backslash\{s,t\}$

$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \text{ for } (i,j) \in E$ 容量制約

最大流問題

最大化 $f = x_{12} + x_{13}$

制約条件 $(x_{24} + x_{25}) - x_{12} = 0$

$(x_{34} + x_{36}) - x_{13} = 0$

$x_{47} - (x_{24} + x_{34}) = 0$

$x_{57} - x_{25} = 0$

$x_{67} - x_{36} = 0$

$0 \leq x_{12} \leq 3, 0 \leq x_{13} \leq 5, 0 \leq x_{24} \leq 2,$

$0 \leq x_{25} \leq 2, 0 \leq x_{34} \leq 3, 0 \leq x_{36} \leq 3,$

$0 \leq x_{47} \leq 2, 0 \leq x_{57} \leq 3, 0 \leq x_{67} \leq 4.$