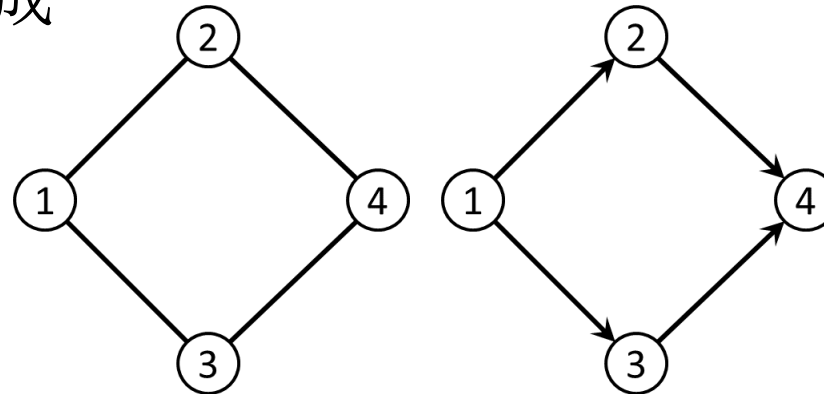


ネットワーク

グラフ

- 点と枝により構成
- 方向性の有無



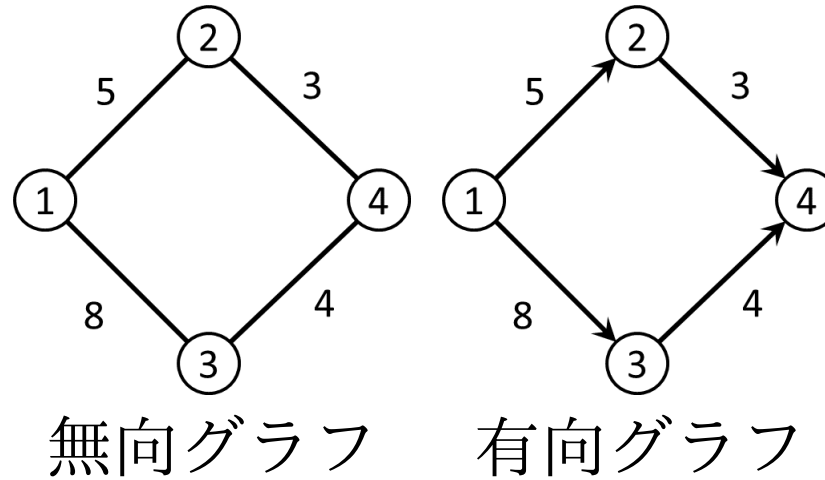
無向グラフ

有向グラフ

ネットワーク

重み付きグラフ

- グラフには重みを与えることができる



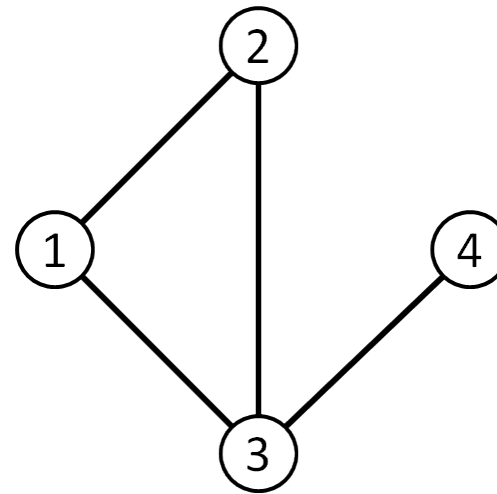
ネットワーク

グラフ

- 点 i と点 j を結ぶ枝 (i, j)
- 点の集合 V , 枝の集合 E
- グラフ $G = (V, E)$

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$$



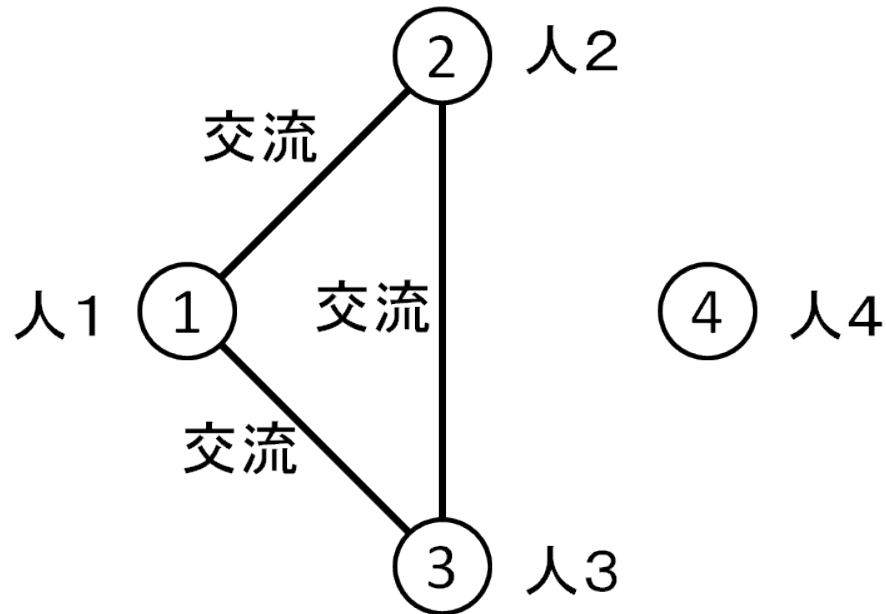
ネットワーク

グラフネットワーク

- グラフによりネットワーク構造を持つシステムを表現
- 点は対象や事象
- 枝は点間の接続関係

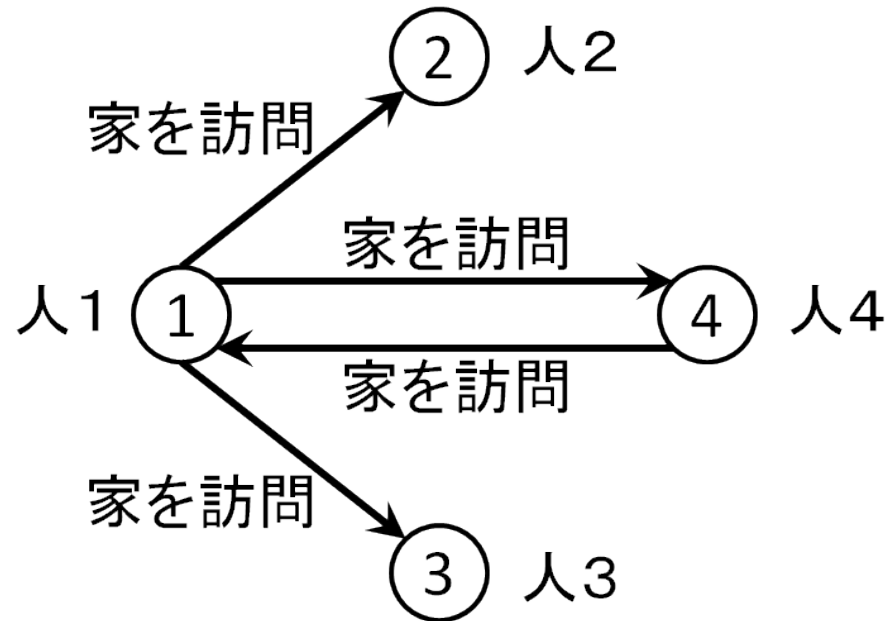
ネットワーク

無向グラフによるネットワーク表現



ネットワーク

有向グラフによるネットワーク表現



ネットワーク

交通網

- 点で地点（交差点，駅）
- 枝で道路，運行
- 枝の重みで
 - － 地点間の距離
 - － 地点間の所要時間
 - － 地点間の料金

ネットワーク

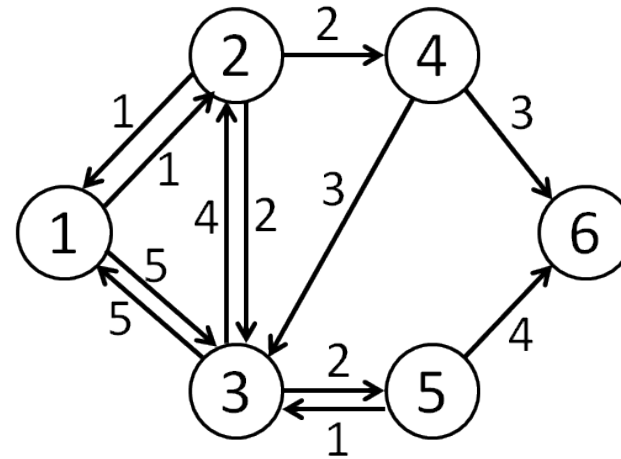
情報通信

- 点で端末
- 枝で接続
- 重みで
 - － 帯域幅
 - － コスト
 - － 遅延

最短路問題

最短路問題

- 点は地点，枝は道路，重みは枝で結ばれた地点間の距離
- 地点1から地点5に最短で移動する経路を求める



最短路問題

最短路問題の応用

- カーナビゲーション・システム
 - － 最短経路の発見
- 鉄道路線の乗り換え案内
 - － 所要時間最短
 - － 運賃最安
 - － 乗換回数最少
 - － 通信ネットワークの経路制御

最短路問題

決定変数

- 枝 (i, j) : 地点 i と地点 j を結ぶ道路
- 決定変数 x_{ij} : 枝 $(i, j) \in E$ を最短路に含めるか否か
- (i, j) を最短路に

含める $x_{ij} = 1$
含めない $x_{ij} = 0$

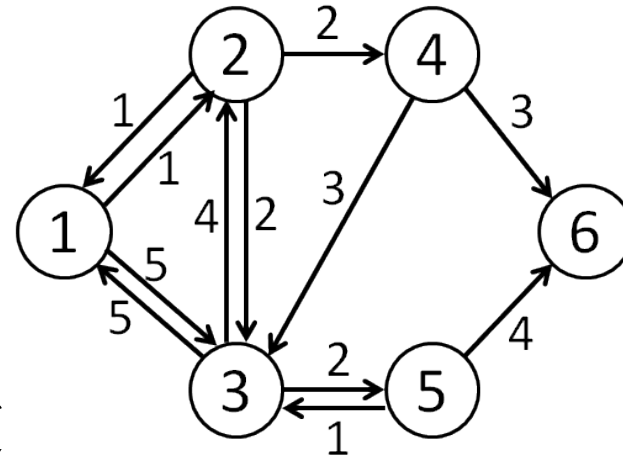
最短路問題

目的関数の定式化

- w_{ij} : (i, j) 間の距離
- z : 移動距離

$$z = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij}$$

- z を最小化する x_{ij} の値を決定

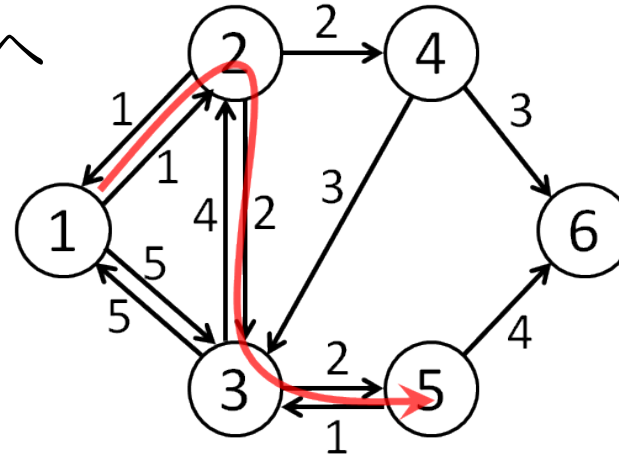


最短路問題

始点（出発地点）の制約の定式化

- 出発地点 s では、他の1地点へ出るだけで、他の地点からは入らない

$$\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = 1$$

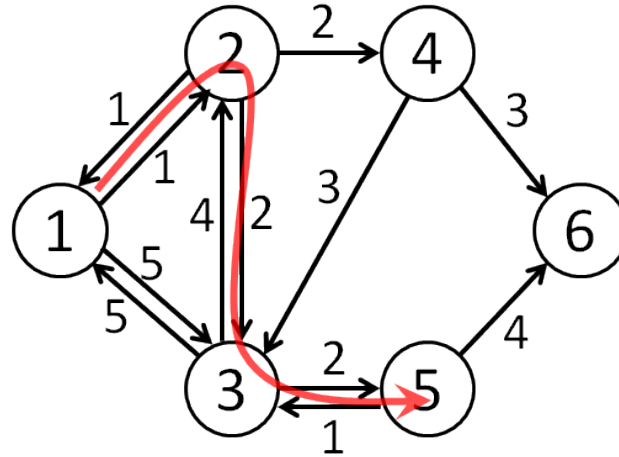


最短路問題

終点（到着地点）の制約の定式化

- 到着地点 t では、
他の1地点から入るだけで、
他の地点に出ない

$$\sum_{(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = -1$$

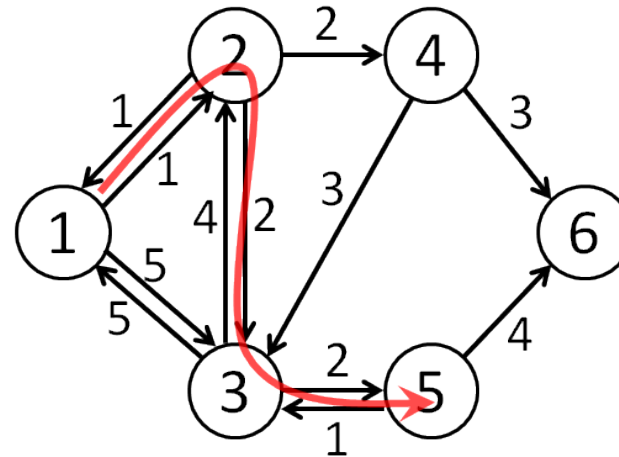


最短路問題

出発地点と到着地点以外の地点の制約の定式化

- 各地点 i (s, t 以外)
- 他の1地点から入って別の1地点に出る
- その地点を通らない

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0$$



最短路問題

最小化 $z = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij}$ 移動距離

制約条件 $\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = 1$ 始点 s の出入

$\sum_{(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = -1$ 終点 t の出入

$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0$ その他地点の出入

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ for $(i, j) \in E$ x_{ij} は 0 か 1

最短路問題

最小化 $z = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij}$ 移動距離

制約条件 $\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = 1$ 始点 s の出入

$\sum_{(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = -1$ 終点 t の出入

$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0$ その他地点の出入

$x_{ij} \geq 0$ for $(i,j) \in E$ x_{ij} の非負条件

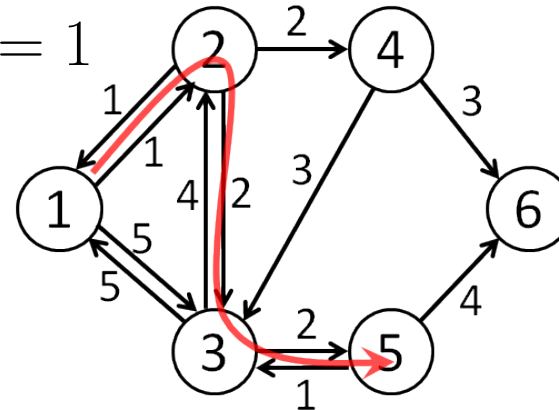
最短路問題

最小化 $z = x_{12} + 5x_{13} + x_{21} + 2x_{23} + 2x_{24}$
 $+ 5x_{31} + 4x_{32} + 2x_{35}$
 $+ 3x_{43} + 3x_{46} + x_{53} + 4x_{56}$

制約条件

始点(点1) $(x_{12} + x_{13}) - (x_{21} + x_{31}) = 1$

終点(点5) $(x_{53} + x_{56}) - x_{35} = -1$



最短路問題

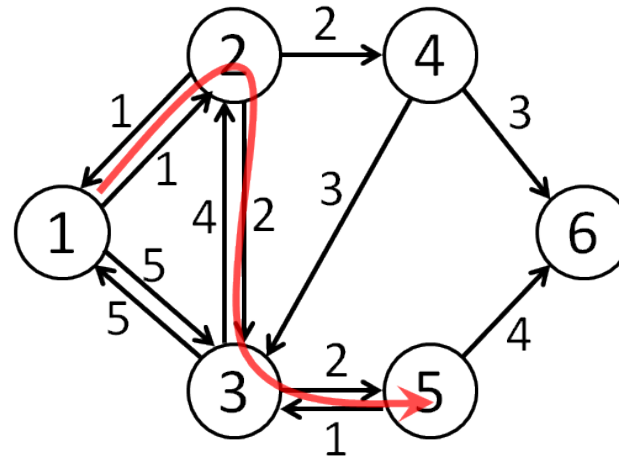
点2 $(x_{21} + x_{23} + x_{24}) - (x_{12} + x_{32}) = 0$

点3 $(x_{31} + x_{32} + x_{35}) - (x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}) = 0$

点4 $(x_{43} + x_{46}) - x_{24} = 0$

点6 $-(x_{46} + x_{56}) = 0$

$x_{ij} \geq 0$ for $(i, j) \in E$

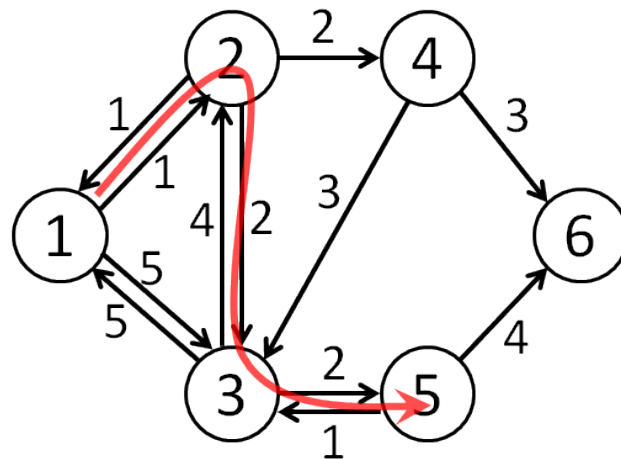


最短路問題

- この問題の最適解

$x_{12}, x_{23}, x_{35} = 1$, 他の $x_{ij} = 0$

- 経路 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ が最短路



ダイクストラ法

ダイクストラ法

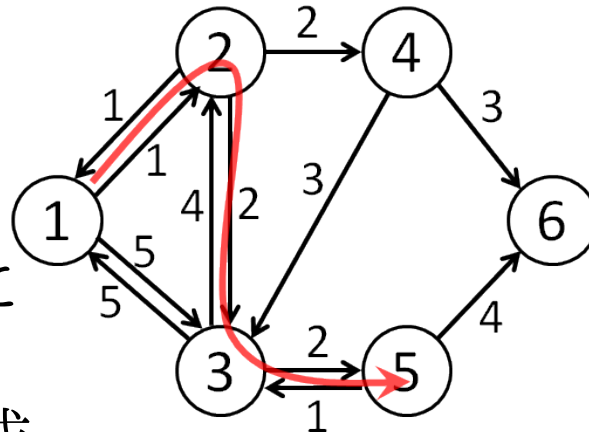
- 最短路問題を効率良く解くアルゴリズム

- 最短路

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

の部分もその
区間の最短路

- 始点から始点に近い地点までの最短路を順次構成



$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$
1から5までの最短路

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
1から3までの最短路

$1 \rightarrow 2$
1から2までの最短路

ダイクストラ法

0. 初期化

$$S \leftarrow \{\}, N \leftarrow V, d(s) \leftarrow 0, \\ d(i) \leftarrow \infty \ (i \in V \setminus \{s\})$$

S : 最短路が確定した点の集合

N : 最短路が確定しない点の集合

$$(N = V \setminus S)$$

$d(i)$: 始点 s から点 i までの暫定最短距離

ダイクストラ法

1. **if** $S = V$ **then** 終了
 else $d(v) \leftarrow \min\{d(i) \mid i \in N\}$ である点 v を
 選ぶ

- すべての点への最短路が確定したら ($S = V$) 終了
- 未確定の点があれば, 未確定の点の集合 N から,
 $d(i)$ が最小になる点を選ぶ (点 v とする)

ダイクストラ法

2. $S \leftarrow S \cup \{v\}$, $N \leftarrow N \setminus \{v\}$

$(v, j) \in E$ かつ $j \in N$ である枝 (v, j) に対して,
 $d(j) > d(v) + w_{vj}$ ならば $d(j) \leftarrow d(v) + w_{vj}$,
 $p(j) \leftarrow v$ として (1) に戻る

- v への最短路は確定 $\rightarrow v$ を N から S へ移す
 - v から直接つながっている N 内の点に対して,
 v 経由の方が距離が短ければ, 経路を v 経由に変更
- ※ $p(j)$: s から点 j までの最短路における j の直前の点

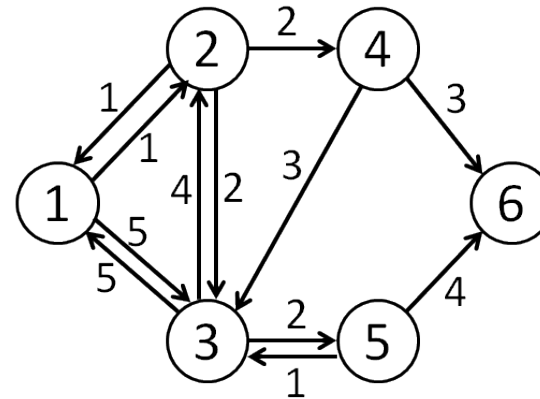
ダイクストラ法

(0)

$S \leftarrow \{\}, N \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$d(1) \leftarrow 0,$

$d(2), d(3), d(4), d(5), d(6) \leftarrow \infty$



ダイクストラ法

1 回目 (1)

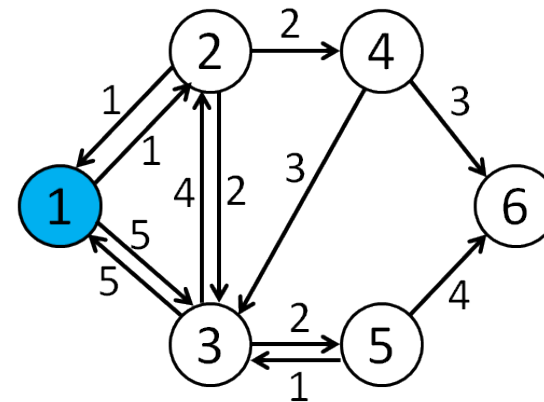
$$S = \{\}, N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$d(1) = 0,$$

$$d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = \infty$$

$$\min\{d(1), d(2), d(3), d(4), d(5), d(6)\} \\ = \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

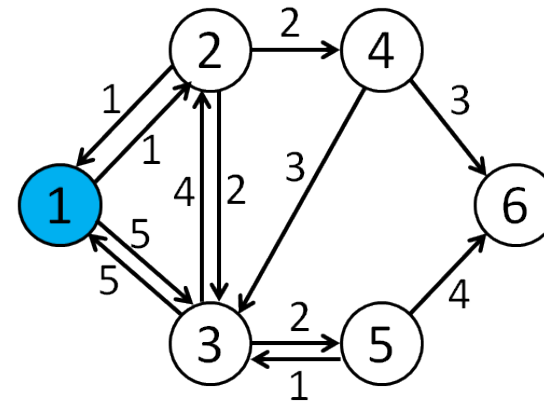
$$\text{よ り } v = 1$$



ダイクストラ法

1 回目 (2)

$S \leftarrow \{1\}, N \leftarrow \{2, 3, 4, 5, 6\}$



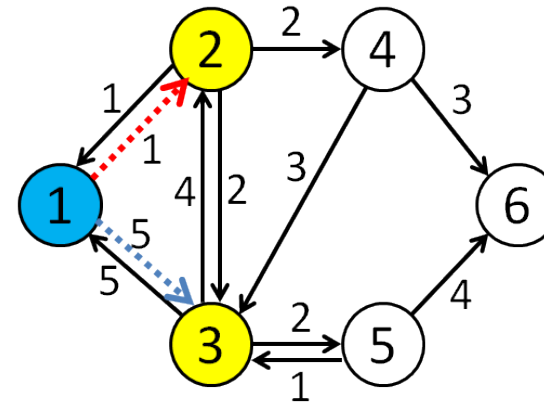
ダイクストラ法

1 回目 (2)

$$S = \{1\}, N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$d(2) = \infty > d(1) + w_{12} = 0 + 1 = 1 \\ \rightarrow d(2) \leftarrow 1, p(2) \leftarrow 1$$

$$d(3) = \infty > d(1) + w_{13} = 0 + 5 = 5 \\ \rightarrow d(3) \leftarrow 5, p(3) \leftarrow 1$$



ダイクストラ法

2回目 (1)

$$S = \{1\}, N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

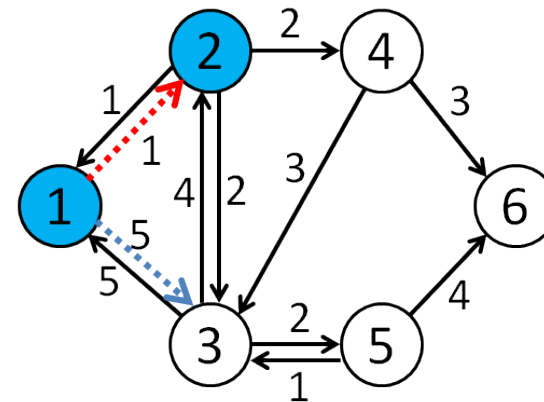
$$d(2) = 1, d(3) = 5,$$

$$d(4) = d(5) = d(6) = \infty$$

$$\min\{d(2), d(3), d(4), d(5), d(6)\}$$

$$= \min\{1, 5, \infty, \infty, \infty\} = 1$$

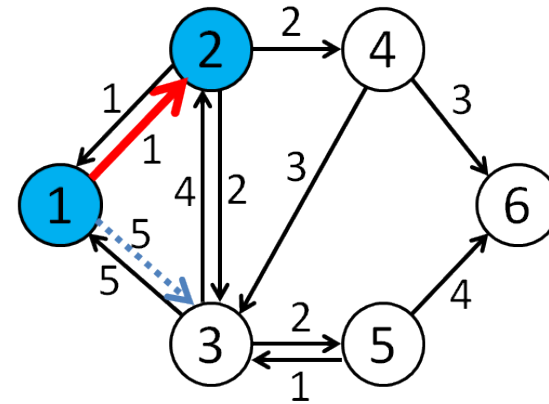
より $v = 2$



ダイクストラ法

2回目 (2)

$S \leftarrow \{1, 2\}$, $N \leftarrow \{3, 4, 5, 6\}$



ダイクストラ法

2回目 (2)

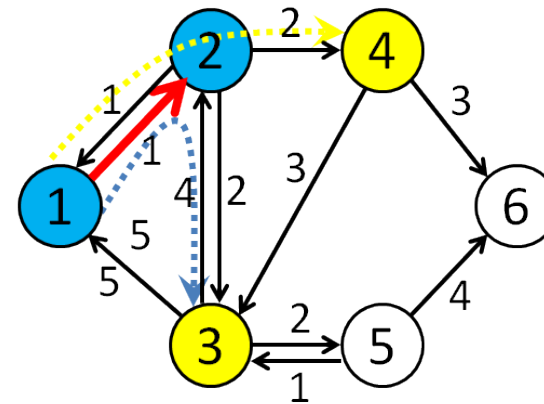
$$S = \{1, 2\}, N = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$d(3) = 5 > d(2) + w_{23} = 1 + 2 = 3$$

$$\rightarrow d(3) \leftarrow 3, p(3) \leftarrow 2$$

$$d(4) = \infty > d(2) + w_{24} = 1 + 2 = 3$$

$$\rightarrow d(4) \leftarrow 3, p(4) \leftarrow 2$$



ダイクストラ法

3回目 (1)

$$S = \{1, 2\}, N = \{3, 4, 5, 6\}$$

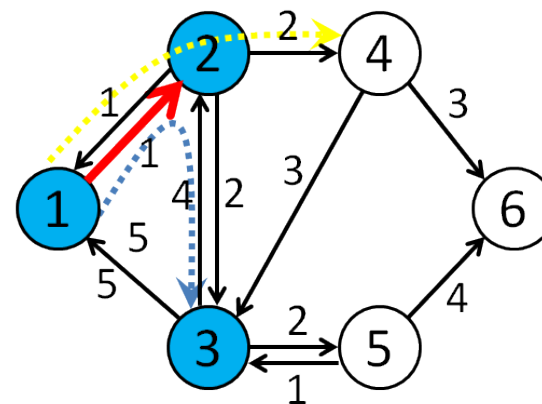
$$d(3) = 3, d(4) = 3,$$

$$d(5) = d(6) = \infty$$

$$\min\{d(3), d(4), d(5), d(6)\}$$

$$= \min\{3, 3, \infty, \infty\} = 3$$

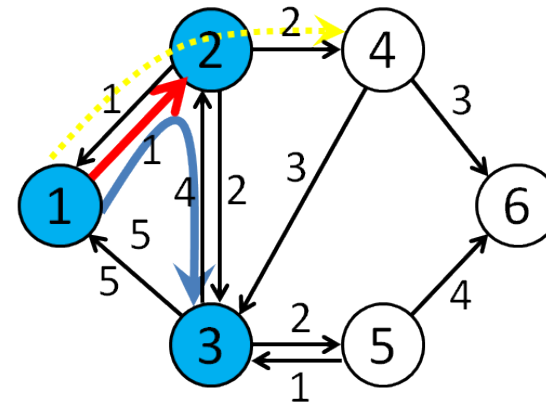
より $v = 3$ ($v = 4$ でもよい)



ダイクストラ法

3 回目 (2)

$S \leftarrow \{1, 2, 3\}$, $N \leftarrow \{4, 5, 6\}$

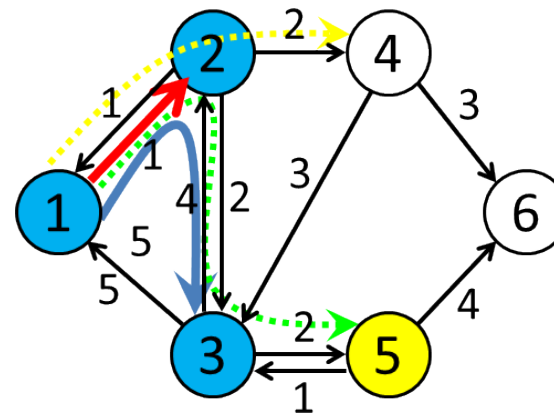


ダイクストラ法

3回目 (2)

$$S = \{1, 2, 3\}, N = \{4, 5, 6\}$$

$$d(5) = \infty > d(3) + w_{35} = 3 + 2 = 5$$
$$\rightarrow d(5) \leftarrow 5, p(5) \leftarrow 3$$



ダイクストラ法

4回目 (1)

$$S = \{1, 2, 3\}, N = \{4, 5, 6\}$$

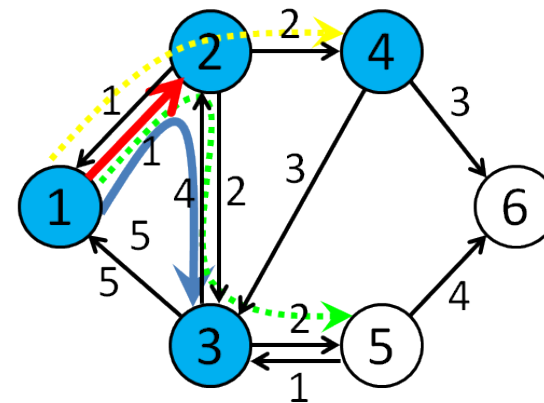
$$d(4) = 3, d(5) = 5$$

$$d(6) = \infty$$

$$\min\{d(4), d(5), d(6)\}$$

$$= \min\{3, 5, \infty\} = 3$$

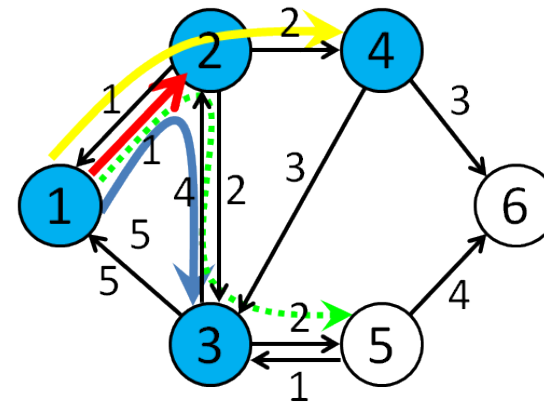
$$\text{よ り } v = 4$$



ダイクストラ法

4 回目 (2)

$S \leftarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $N \leftarrow \{5, 6\}$

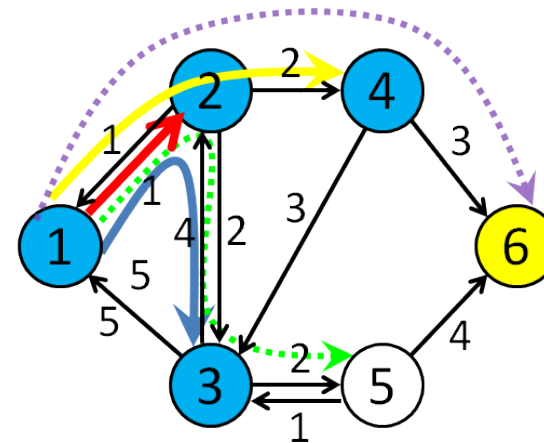


ダイクストラ法

4 回目 (2)

$$S = \{1, 2, 3, 4\}, N = \{5, 6\}$$

$$d(6) = \infty > d(4) + w_{46} = 3 + 3 = 6$$
$$\rightarrow d(6) \leftarrow 6, p(6) \leftarrow 4$$



ダイクストラ法

5 回目 (1)

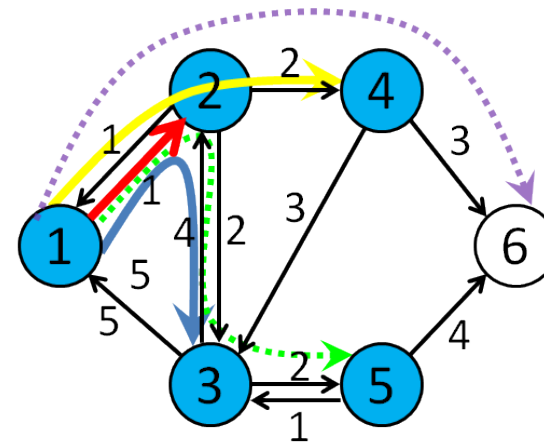
$$S = \{1, 2, 3, 4\}, N = \{5, 6\}$$

$$d(5) = 5$$

$$d(6) = 6$$

$$\min\{d(5), d(6)\} = \min\{5, 6\} = 5$$

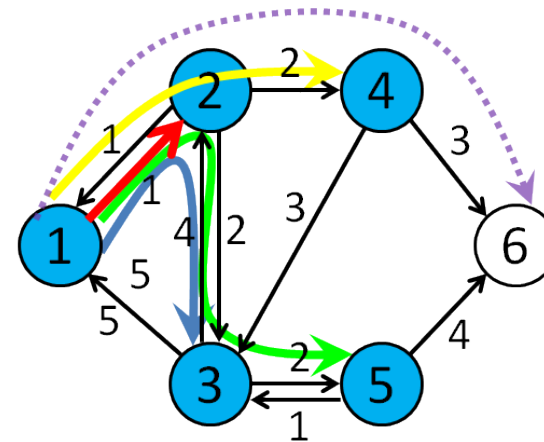
より $v = 5$



ダイクストラ法

5回目 (2)

$S \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, N \leftarrow \{6\}$



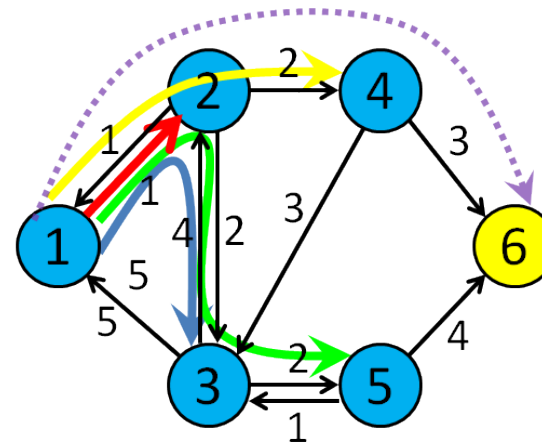
ダイクストラ法

5回目 (2)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, N = \{6\}$$

$$d(6) = 6 < d(5) + w_{56} = 5 + 4 = 9$$

$\rightarrow d(6) = 6, p(6) = 4$ のまま



ダイクストラ法

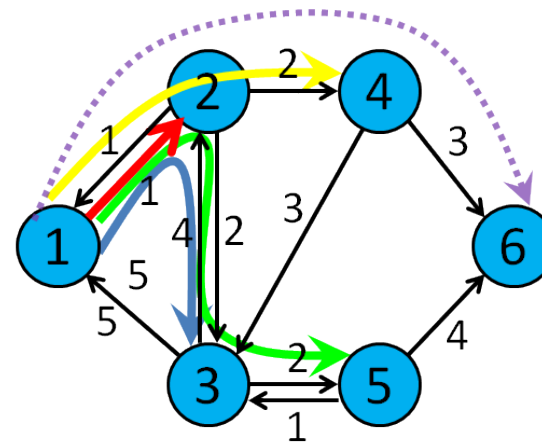
6 回目 (1)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, N = \{6\}$$

$$d(6) = 6$$

$$\min\{d(6)\} = \min\{6\} = 6$$

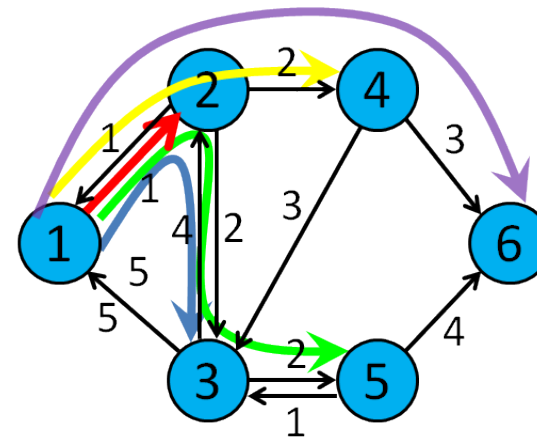
よ り $v = 6$



ダイクストラ法

6 回目 (2)

$S \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, N \leftarrow \{\}$

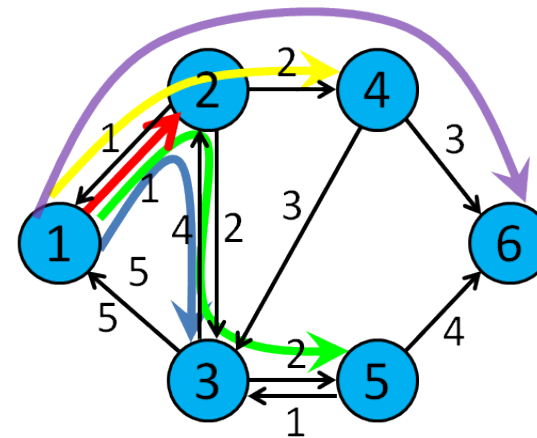


ダイクストラ法

7回目 (1)

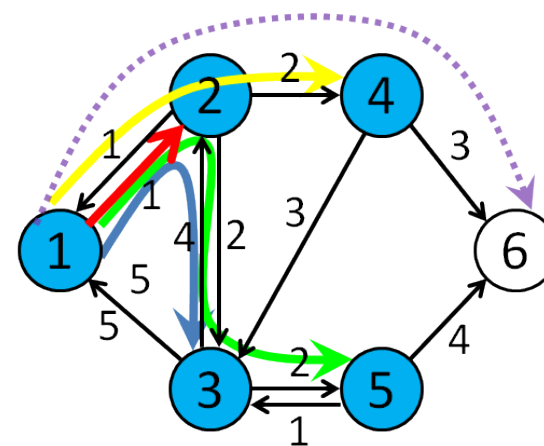
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, N = \{\}$

$S = V$ なので終了



ダイクストラ法

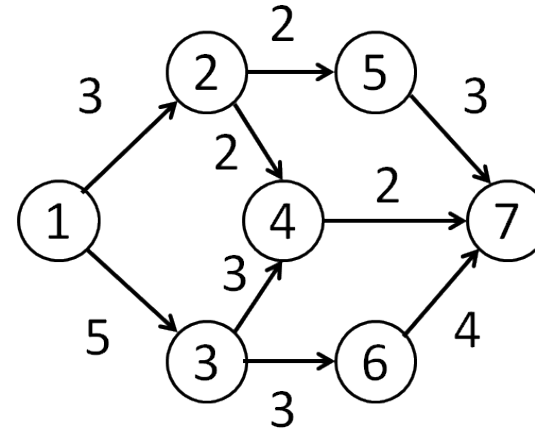
- 点6への最短路
- $d(6) = 6$ なので距離は6
- $p(6) = 4$, $p(4) = 2$,
 $p(2) = 1$ なので,

$$\begin{array}{c} 6 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \\ \Downarrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \end{array}$$


最大流問題

最大流問題

- 点は地点，枝は通路，重みは通路の容量（流量の最大値，単位時間に通れる人数）
- 地点1に客が集まっていて，出口は地点7
- 最も多く出口に客を送り出すよう客を誘導

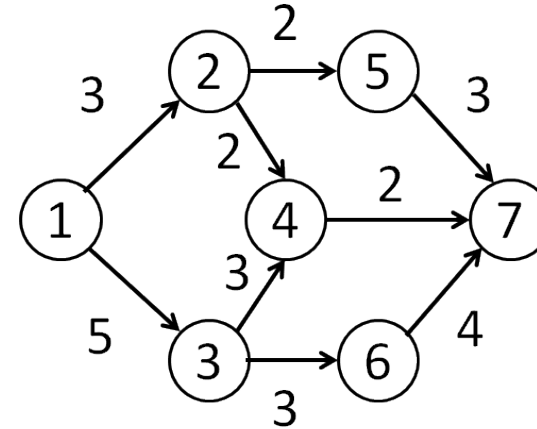


最大流問題

- 点の集合を V , 枝の集合を E ,
- 枝 (i, j) の枝 (i, j) の流量を x_{ij}
容量を u_{ij}
- 流量 f は, 始点 s および終点 t
の流量に等しい

$$\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = f$$

$$\sum_{(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = -f$$



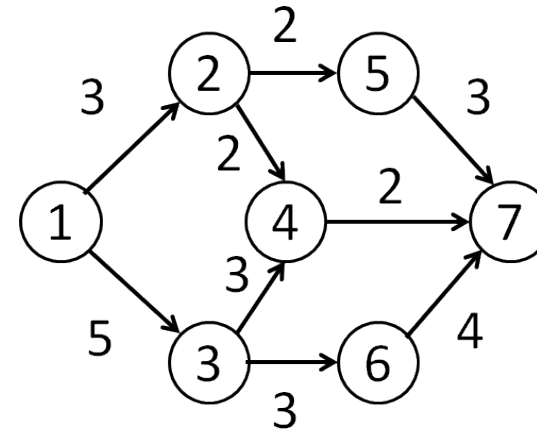
最大流問題

- 他の点 $i \in V \setminus \{s, t\}$ においては、
点に入る流量と、点から出る
流量が等しい

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0$$

- 各枝の流量 x_{ij} は容量 u_{ij} 以下

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E$$



最大流問題

最大化 f

流量

制約条件

$$\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = f$$

始点 s

$$\sum_{(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = -f$$

終点 t

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0$$

$i \in V \setminus \{s, t\}$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ for } (i, j) \in E$$

容量制約

最大流問題

最大化 $f = \sum_{(s,j) \in E} x_{sj}$ 流量

制約条件 $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0 \quad i \in V \setminus \{s, t\}$

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ for $(i, j) \in E$ 容量制約

最大流問題

最大化 $f = x_{12} + x_{13}$

制約条件 $(x_{24} + x_{25}) - x_{12} = 0$

$(x_{34} + x_{36}) - x_{13} = 0$

$x_{47} - (x_{24} + x_{34}) = 0$

$x_{57} - x_{25} = 0$

$x_{67} - x_{36} = 0$

$0 \leq x_{12} \leq 3, 0 \leq x_{13} \leq 5, 0 \leq x_{24} \leq 2,$

$0 \leq x_{25} \leq 2, 0 \leq x_{34} \leq 3, 0 \leq x_{36} \leq 3,$

$0 \leq x_{47} \leq 2, 0 \leq x_{57} \leq 3, 0 \leq x_{67} \leq 4.$

