

PERT

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

- 大規模プロジェクトを期間内に完了するために、各作業の開始時期、投入資源などを分析する手法
- PERT/CPM CPM: (Critical Path Method)

PERT

PERTの手順

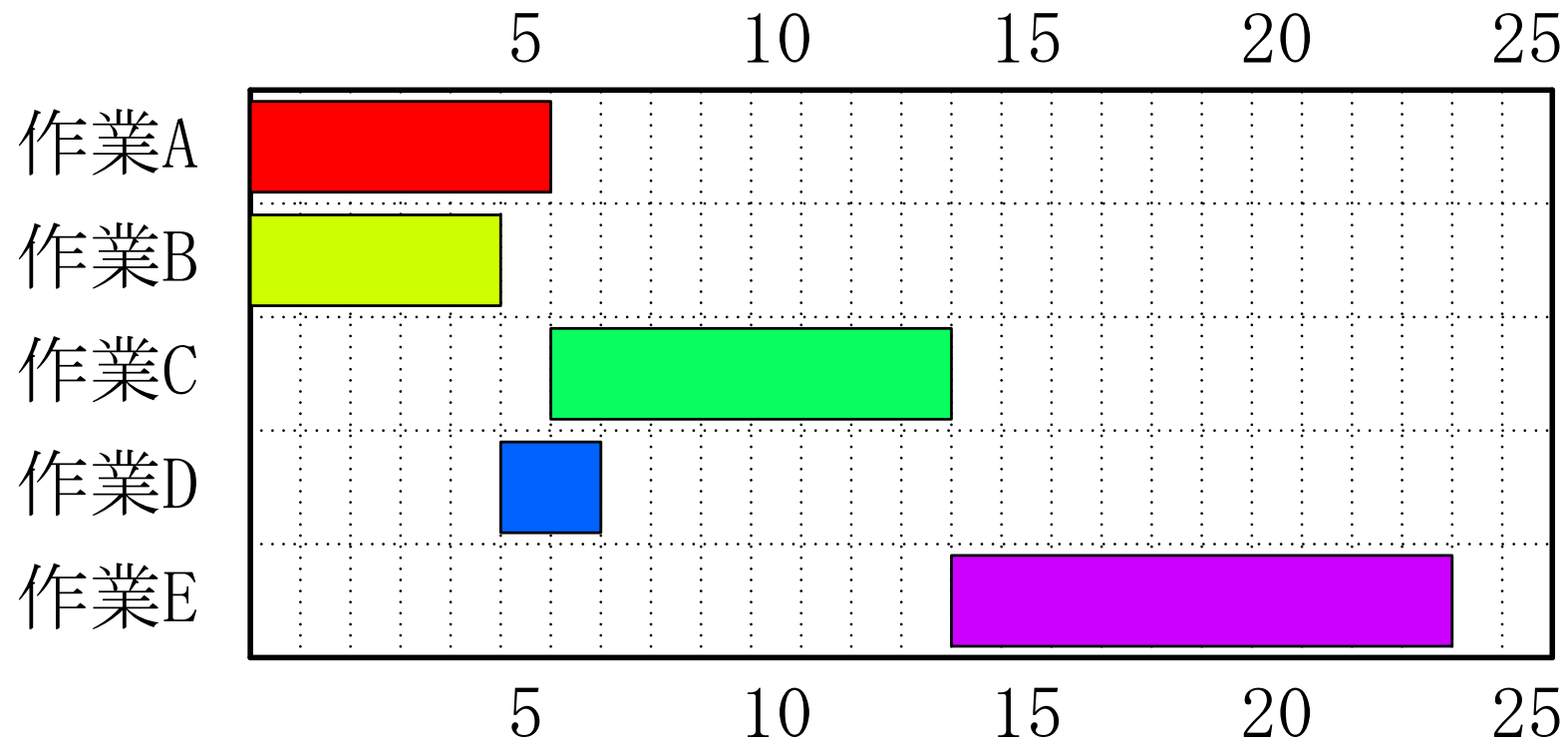
1. プロジェクトを構成する作業に分解
2. 作業間の先行関係を記述
3. 作業間の先行関係に基づき、プロジェクトを構成する作業を結合したネットワーク（アロー・ダイアグラム）を構成
4. 各作業に所要時間を割り当てる
5. 作業の時間的な指標を算出し分析

PERT

ケーキの飾りつけプロジェクトの作業リスト

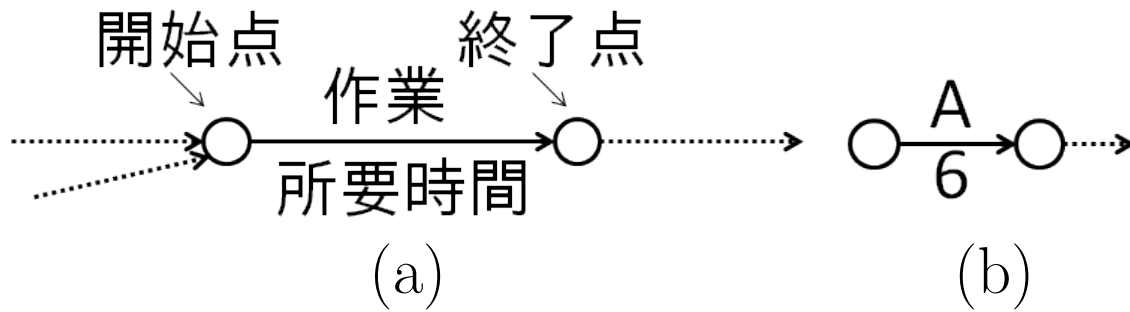
記号	作業内容	所要時間(分)	先行作業
A	スポンジの整形	6	-
B	ホイップクリームを作る	5	-
C	スポンジにホイップクリームを塗る	8	A, B
D	絞り袋にクリームを詰める	2	B
E	クリームを絞り飾り付ける	10	C, D

ガントチャート

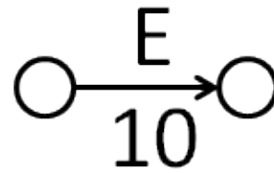
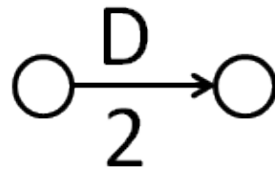
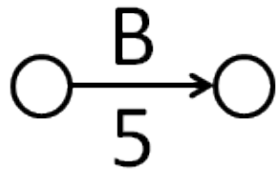
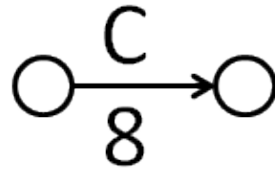
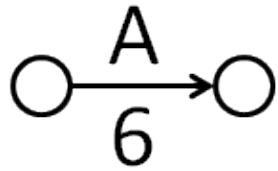


アロー・ダイアグラム

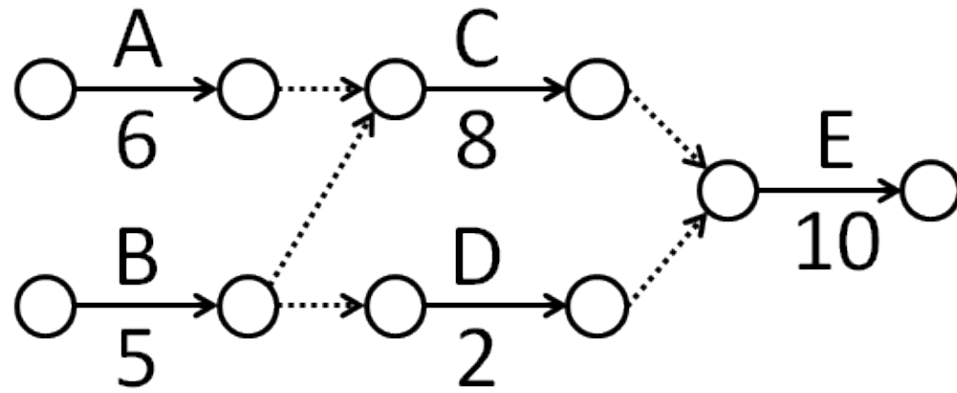
アロー・ダイアグラム



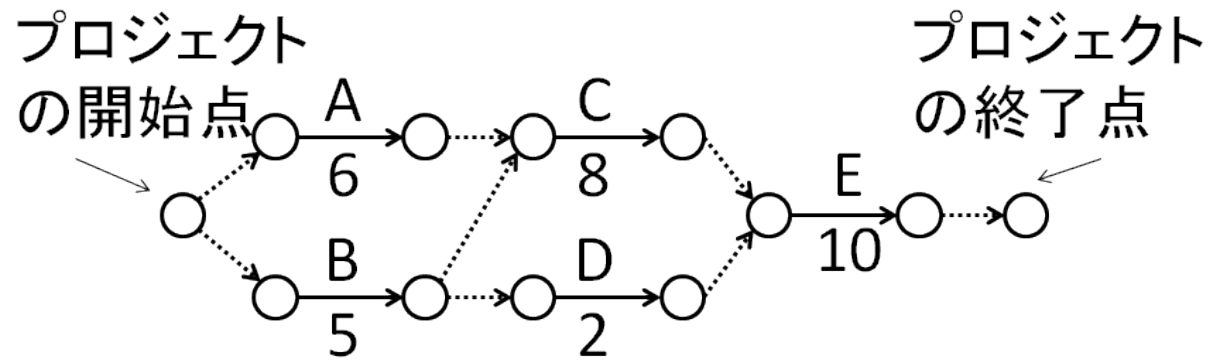
アロー・ダイアグラム



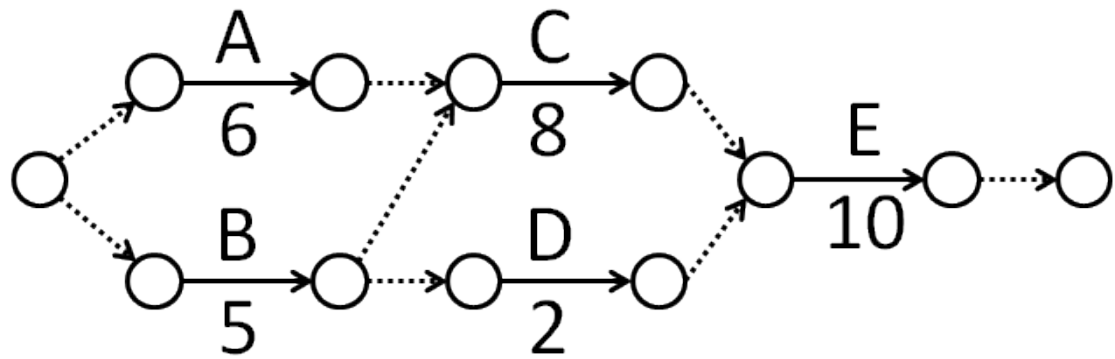
アロー・ダイアグラム



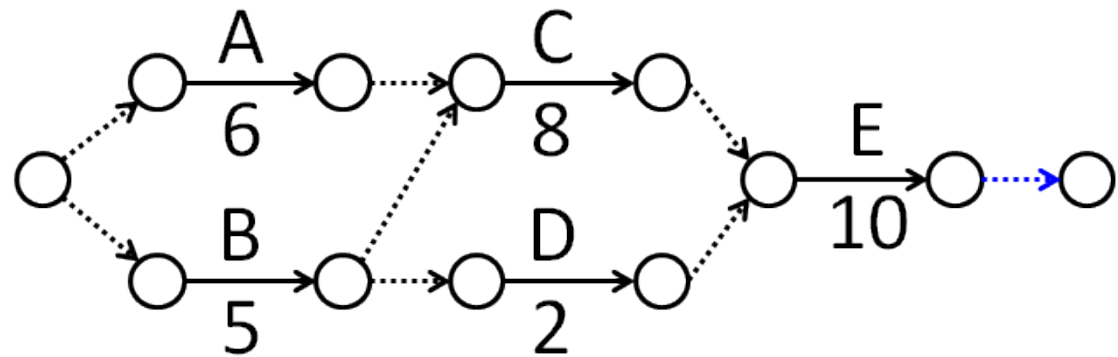
アロー・ダイアグラム



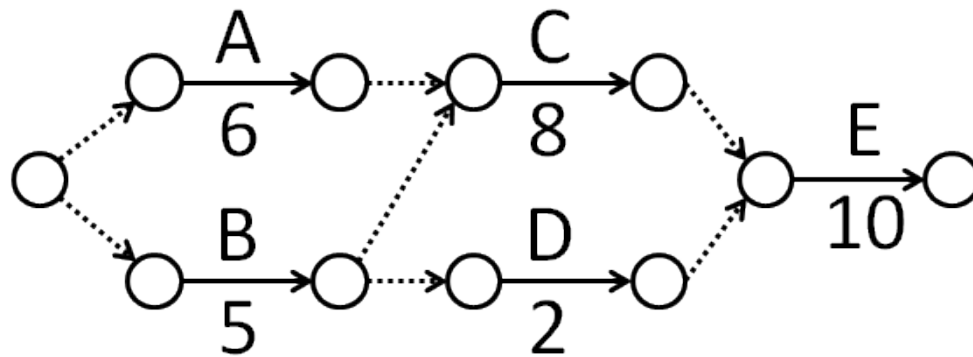
アロー・ダイアグラム



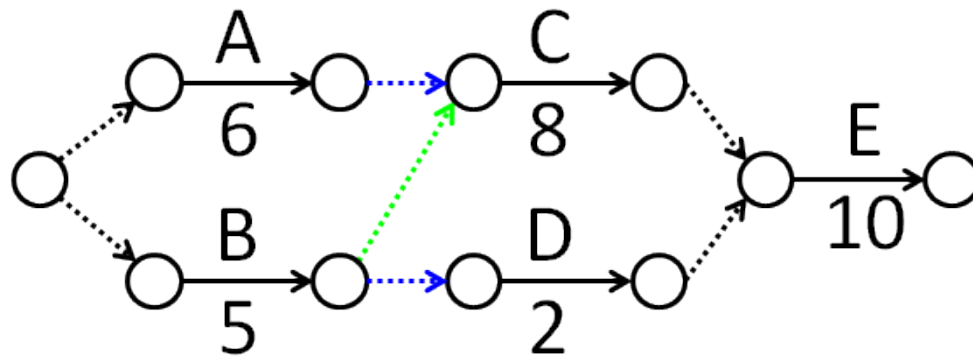
アロー・ダイアグラム



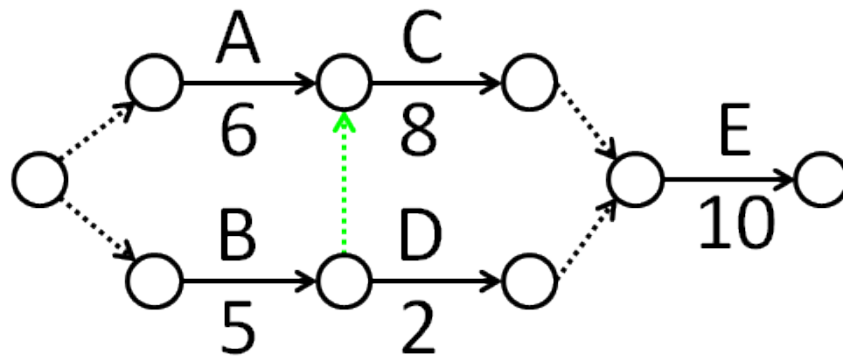
アロー・ダイアグラム



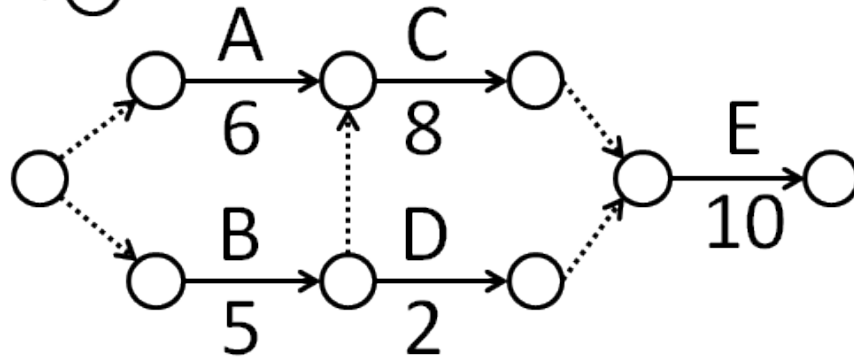
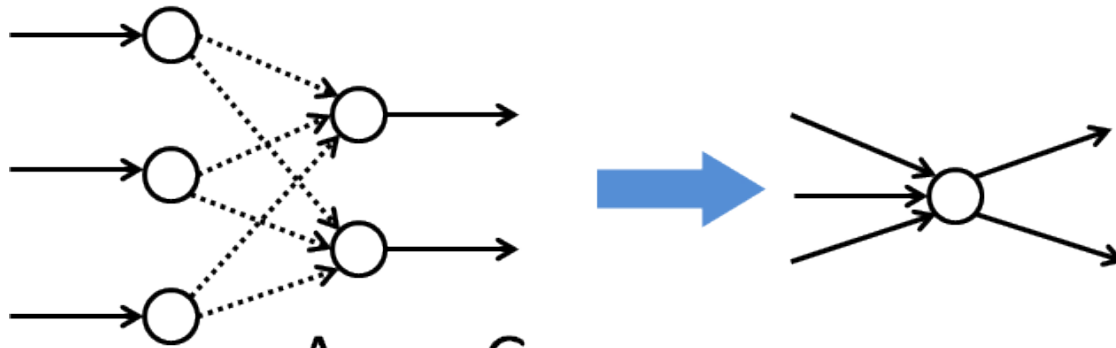
アロー・ダイアグラム



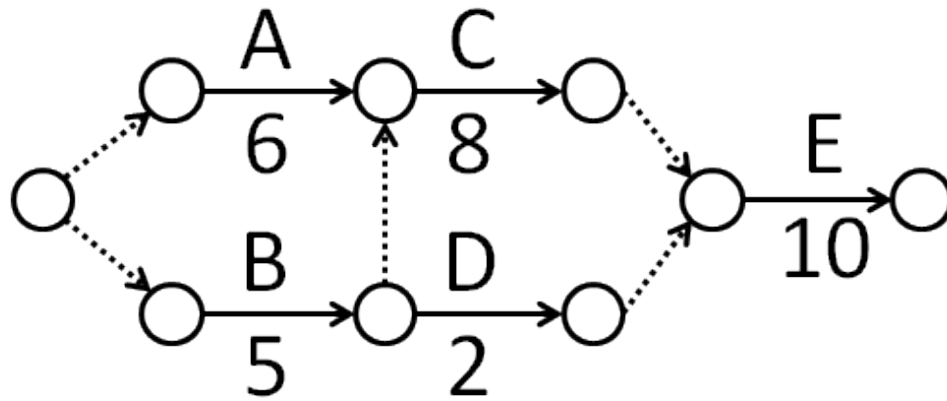
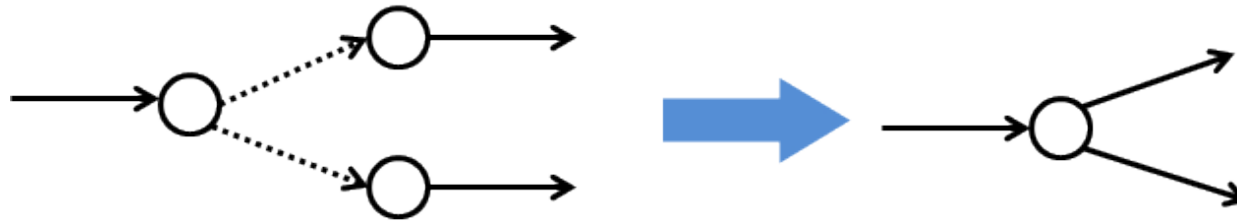
アロー・ダイアグラム



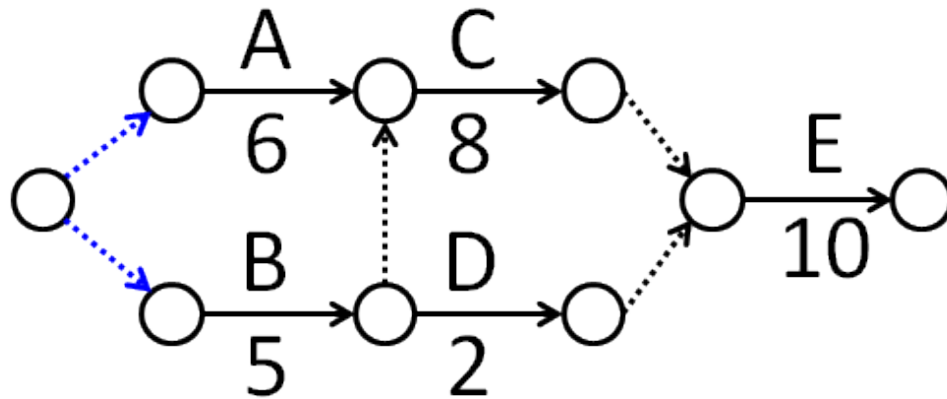
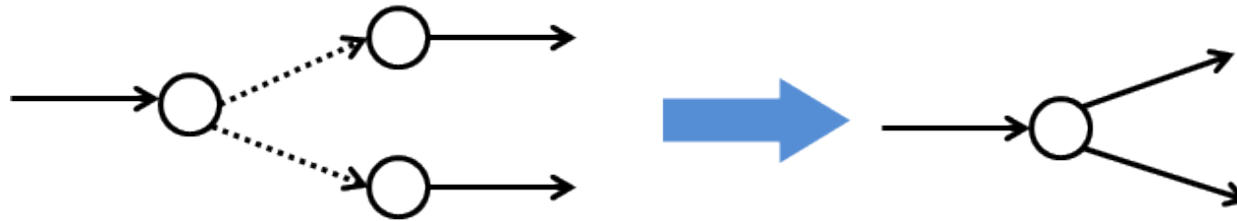
アロー・ダイアグラム



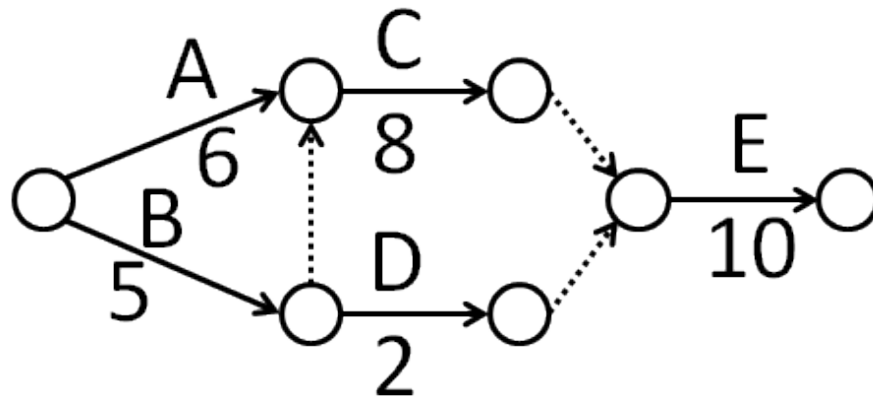
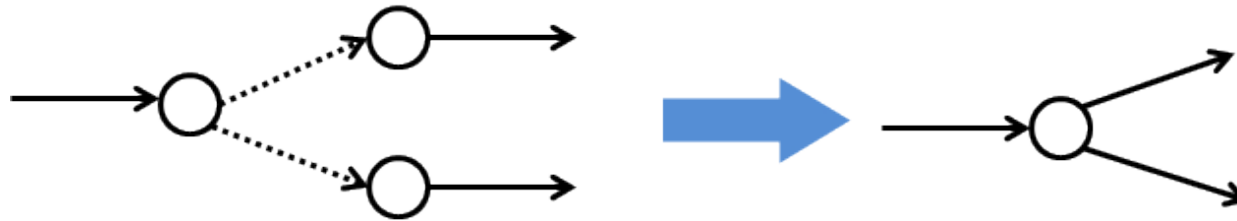
アロー・ダイアグラム



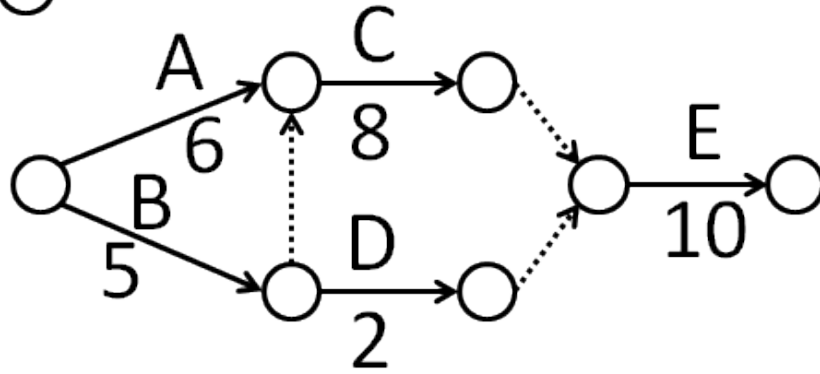
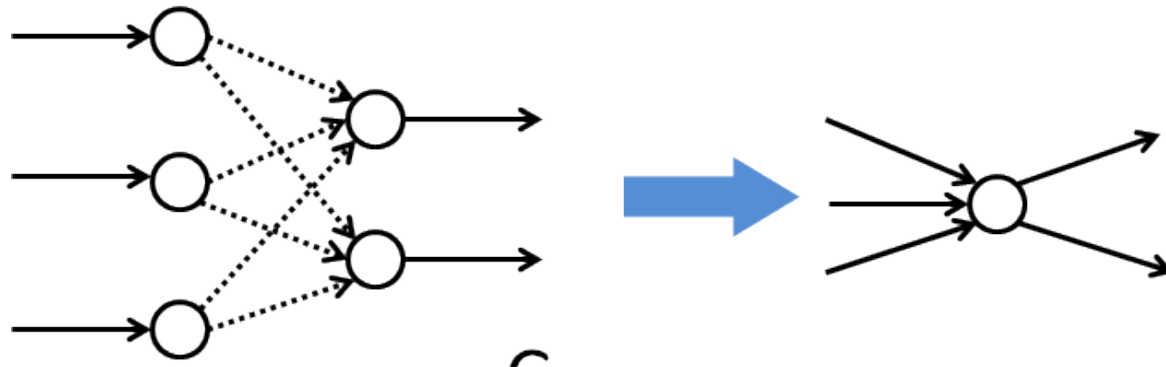
アロー・ダイアグラム



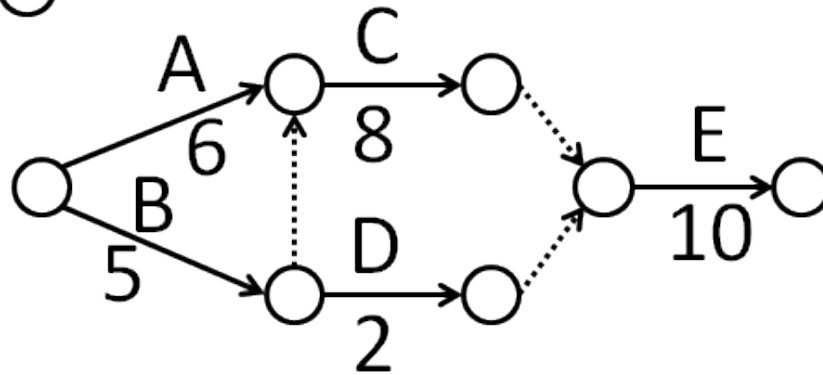
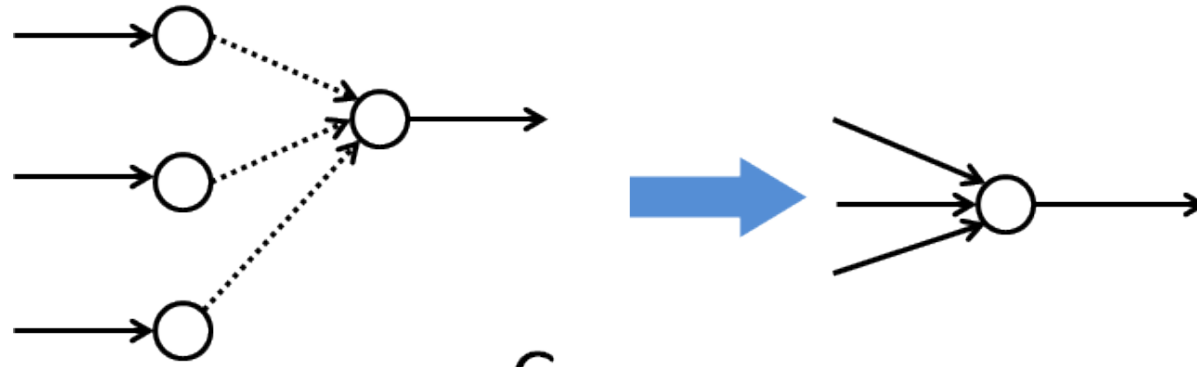
アロー・ダイアグラム



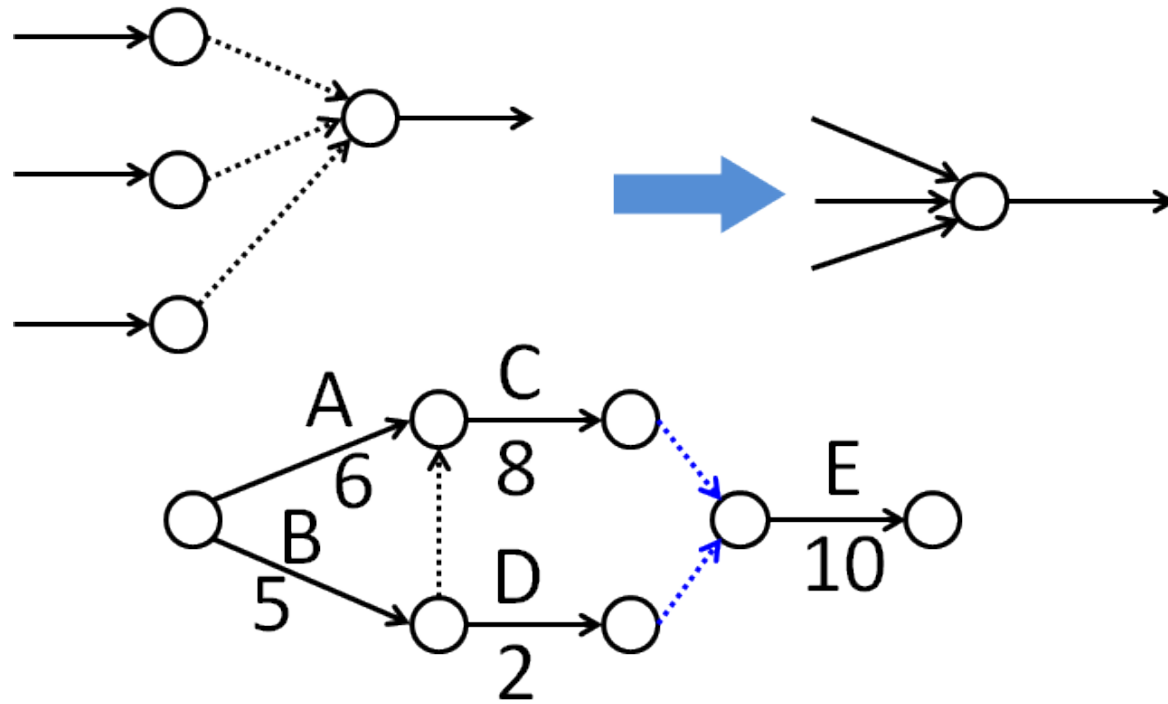
アロー・ダイアグラム



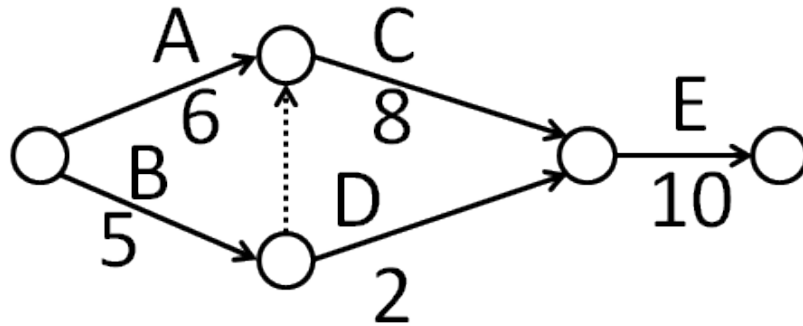
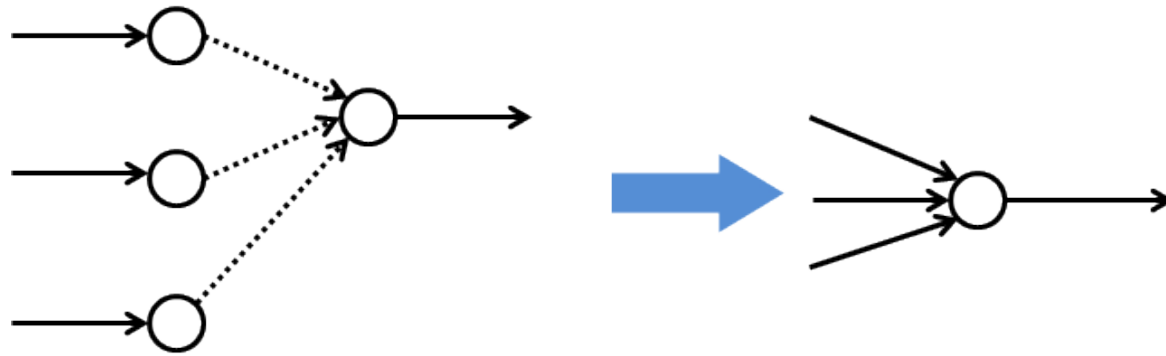
アロー・ダイアグラム



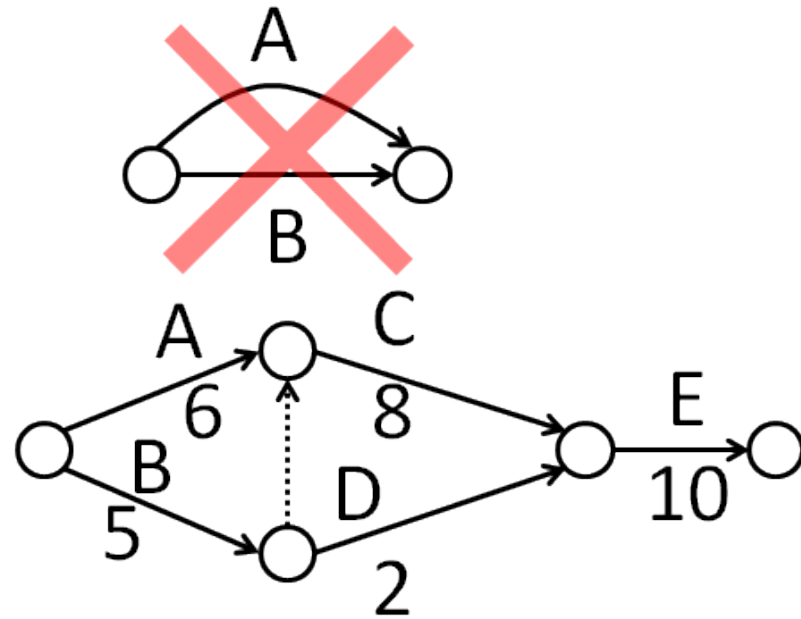
アロー・ダイアグラム



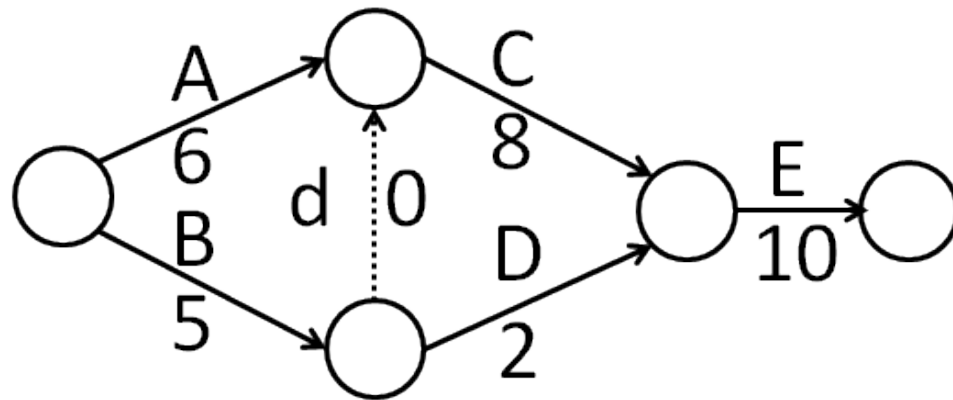
アロー・ダイアグラム



アロー・ダイアグラム

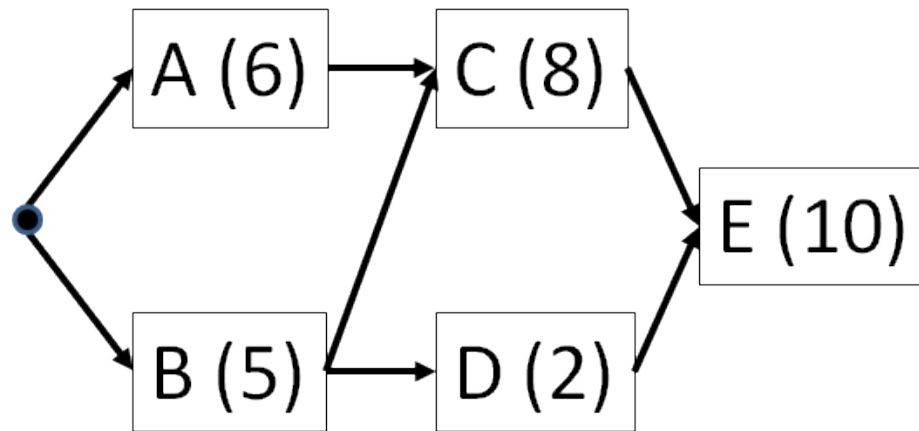


アロー・ダイアグラム

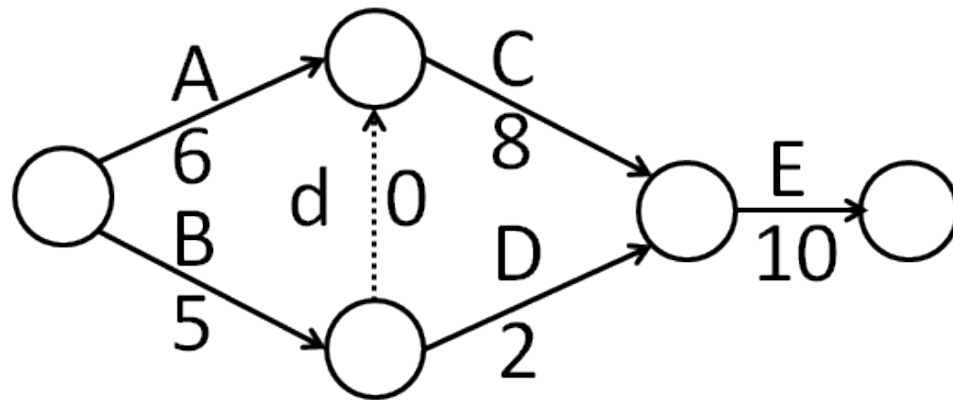


アロー・ダイアグラム

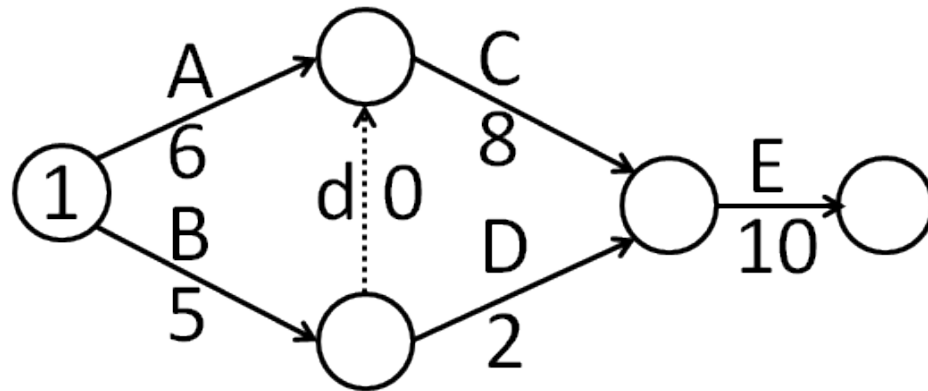
AON (Activity On Node) 表現



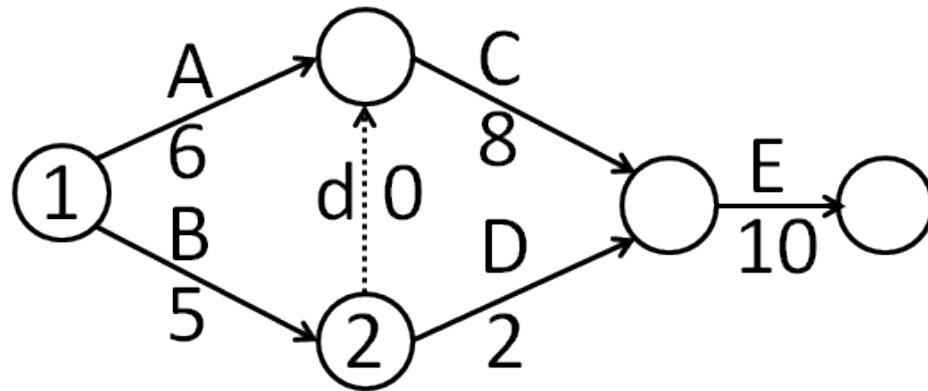
アロー・ダイアグラム



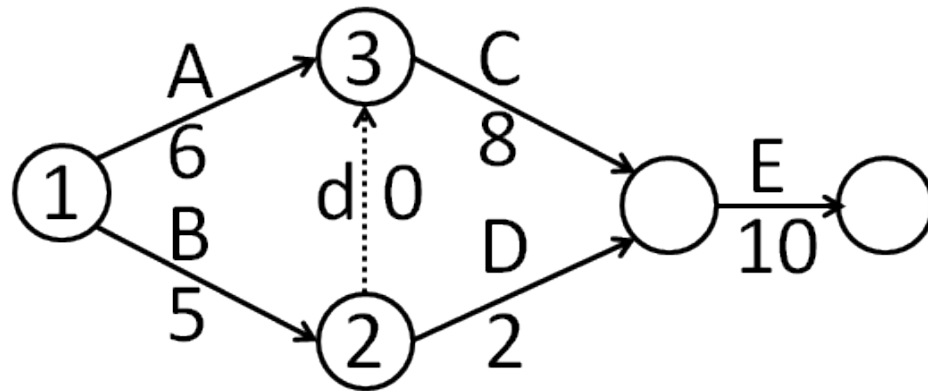
アロー・ダイアグラム



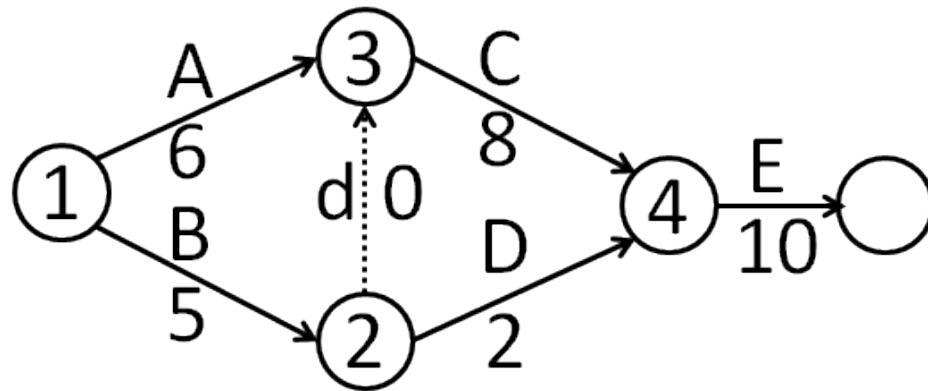
アロー・ダイアグラム



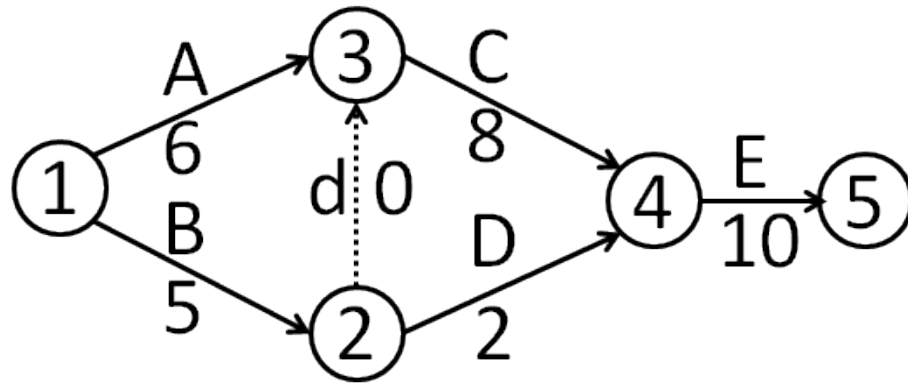
アロー・ダイアグラム



アロー・ダイアグラム



アロー・ダイアグラム



特性値の算出

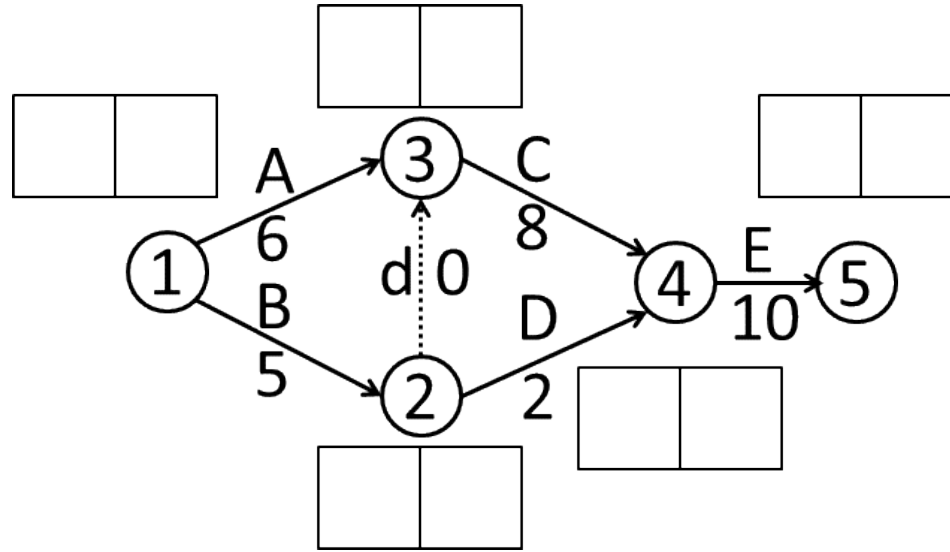
特性値の算出

最早節点時刻 各点において最も早く作業を開始できる時刻

最遅節点時刻 プロジェクトを最早で完了させるために、各点から開始する作業の少なくとも一つを開始すべきもっとも遅い時刻

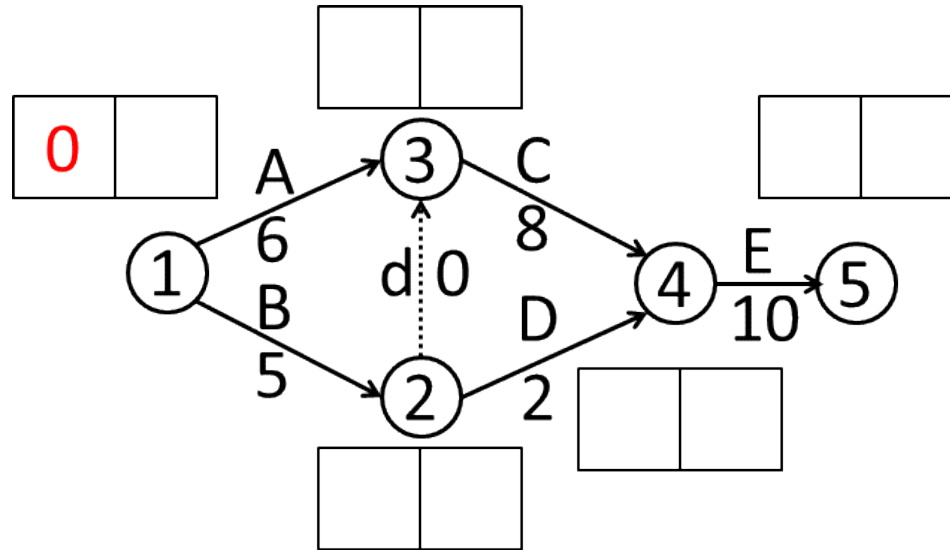
特性値の算出

アロー・ダイアグラム



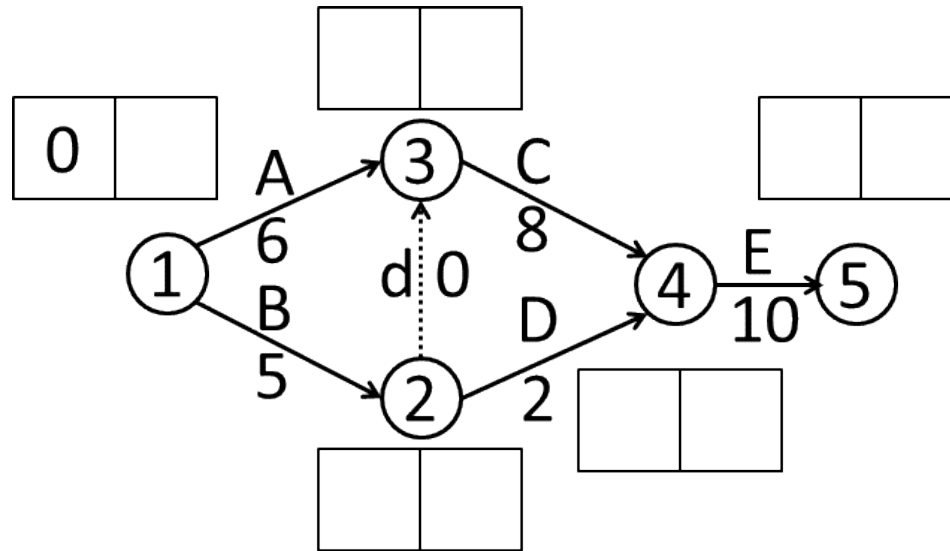
特性値の算出

最早節点時刻



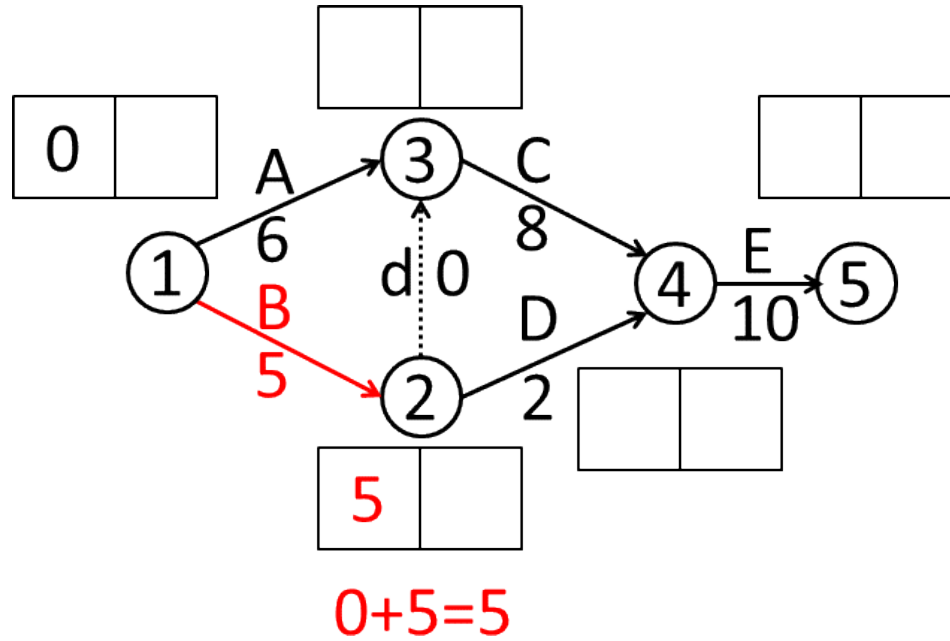
特性値の算出

最早節点時刻



特性値の算出

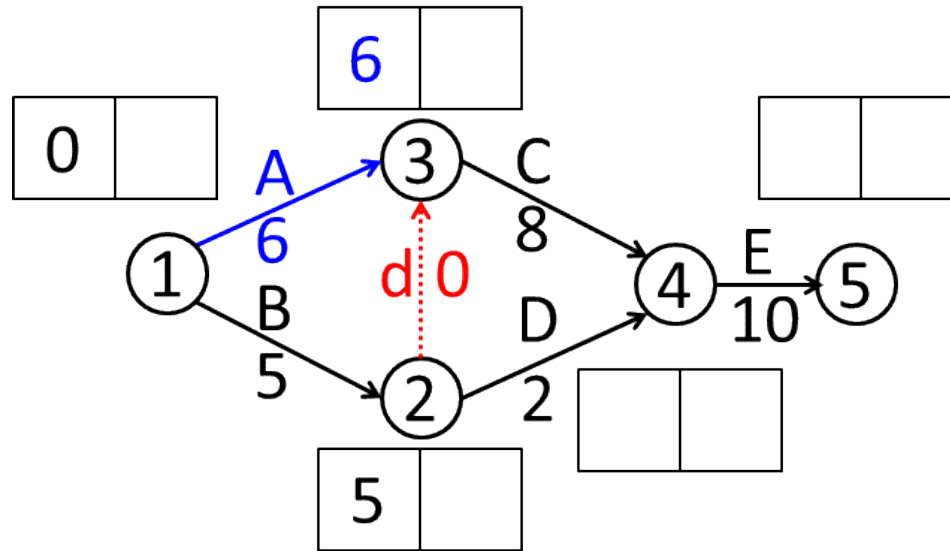
最早節点時刻



特性値の算出

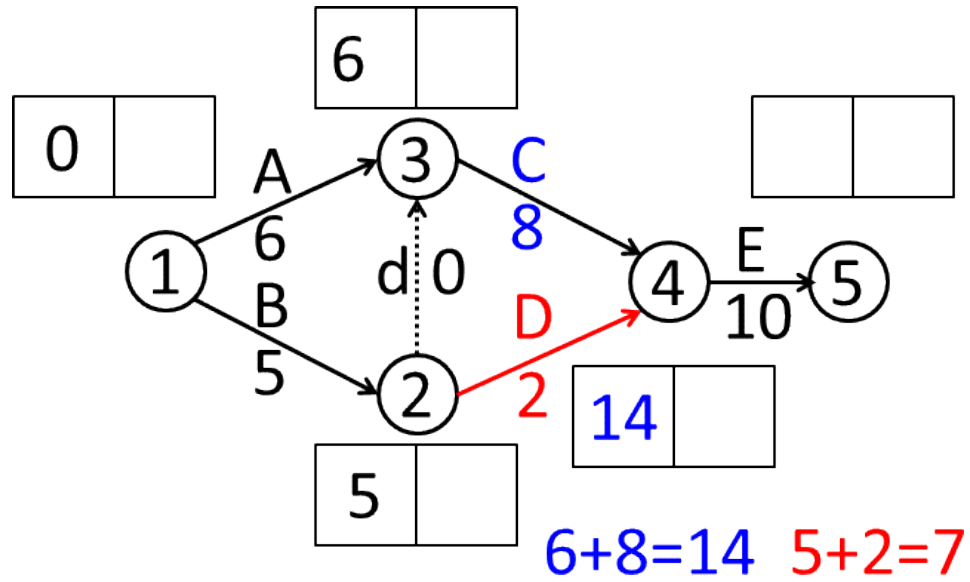
最早節点時刻

$$0+6=6 \quad 5+0=5$$



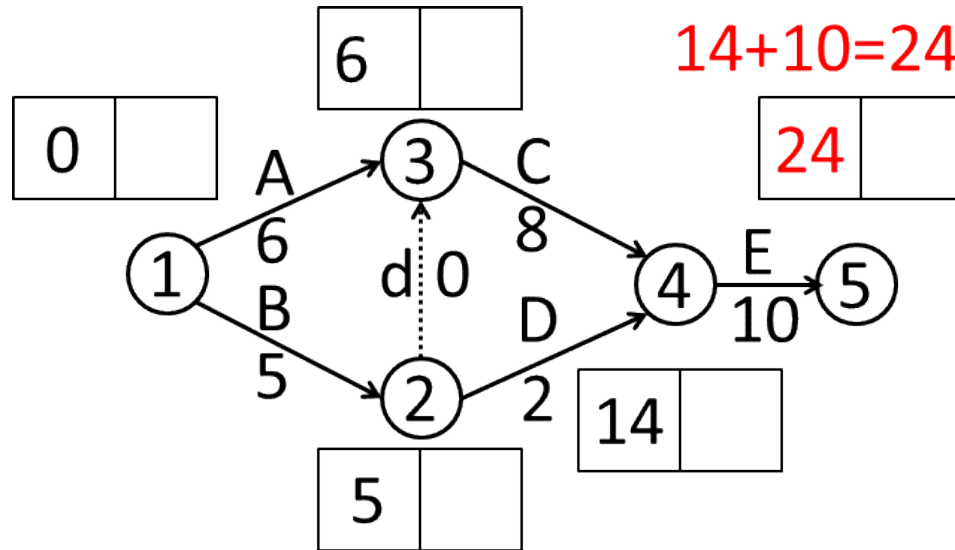
特性値の算出

最早節点時刻



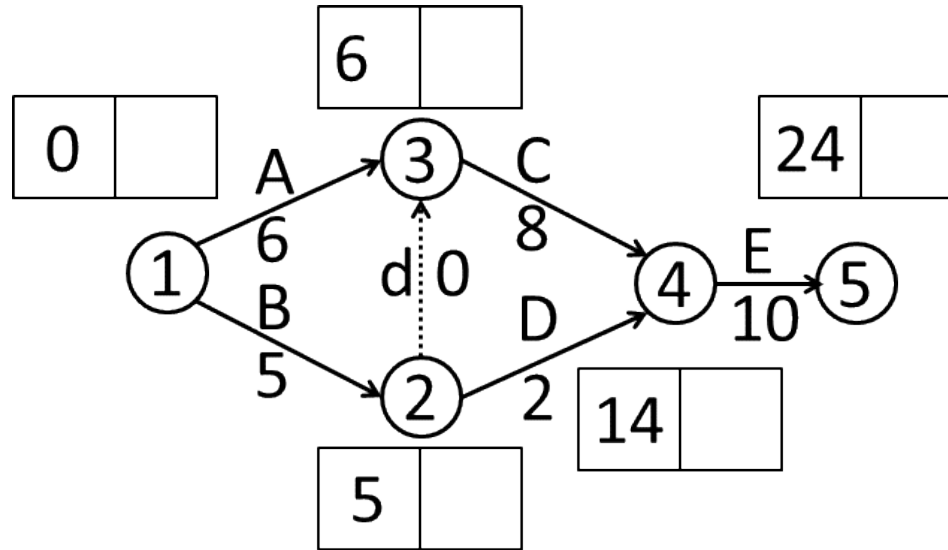
特性値の算出

最早節点時刻



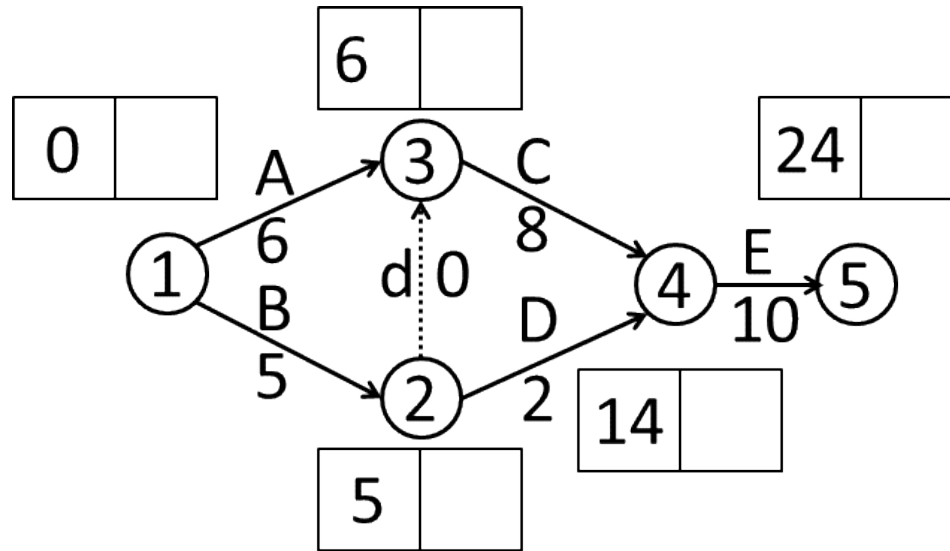
特性値の算出

最早節点時刻



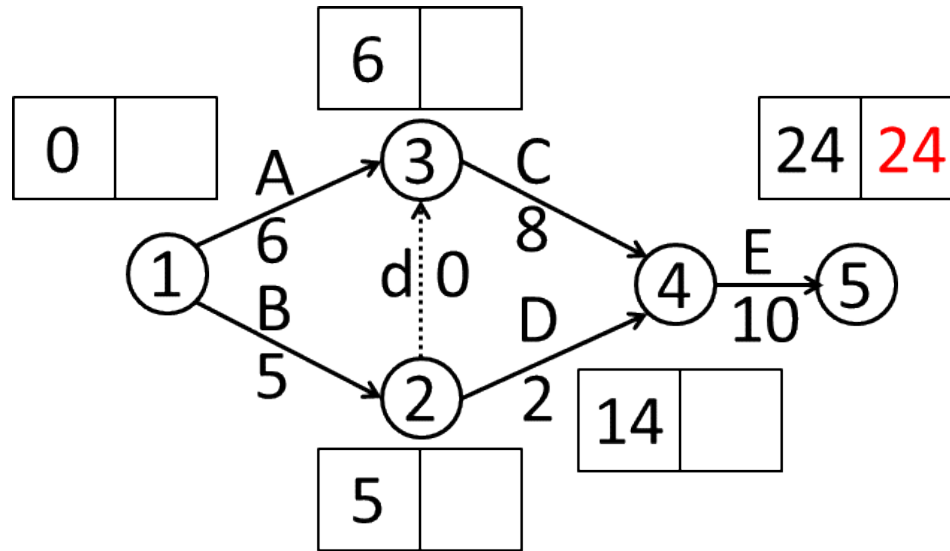
特性値の算出

最遅節点時刻



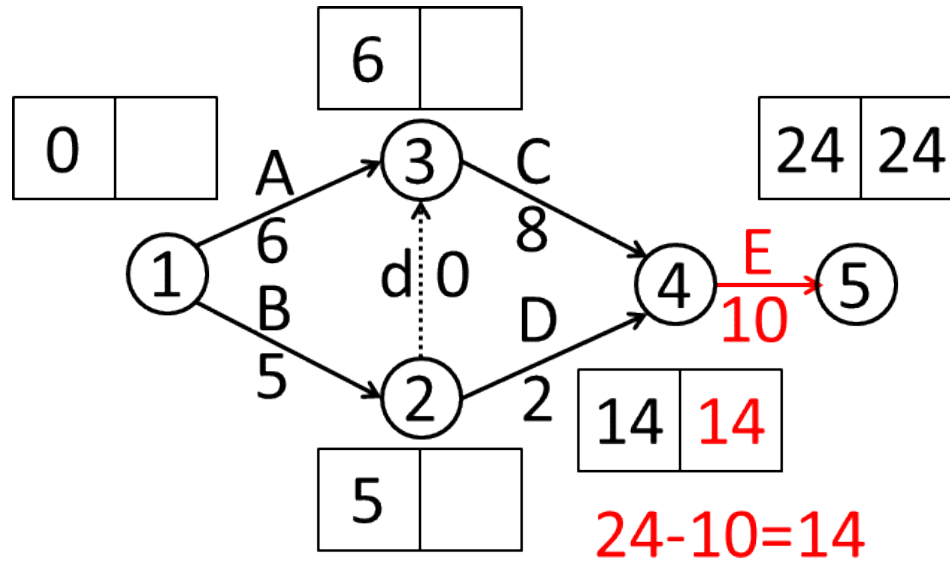
特性値の算出

最遅節点時刻



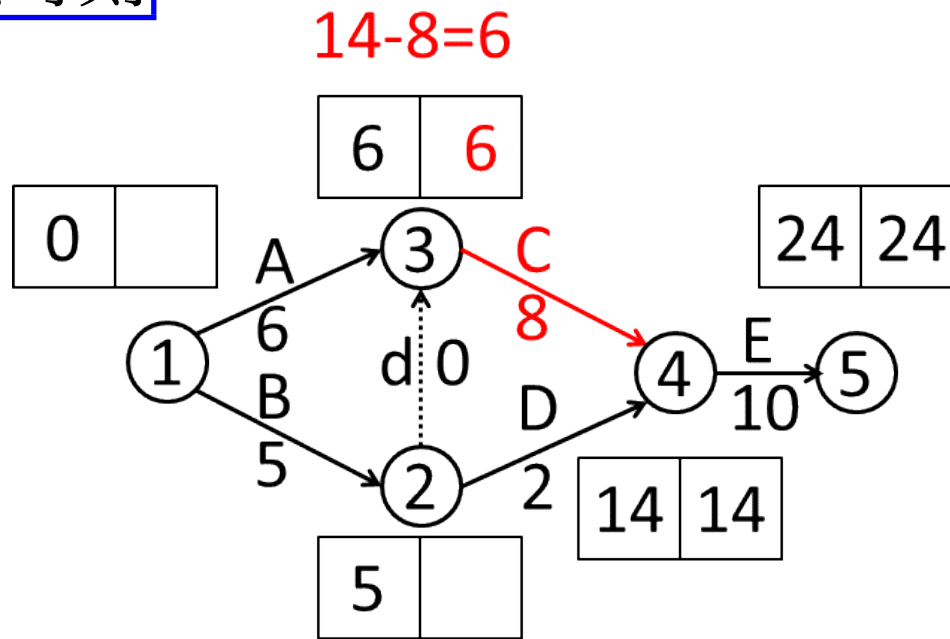
特性値の算出

最遅節点時刻



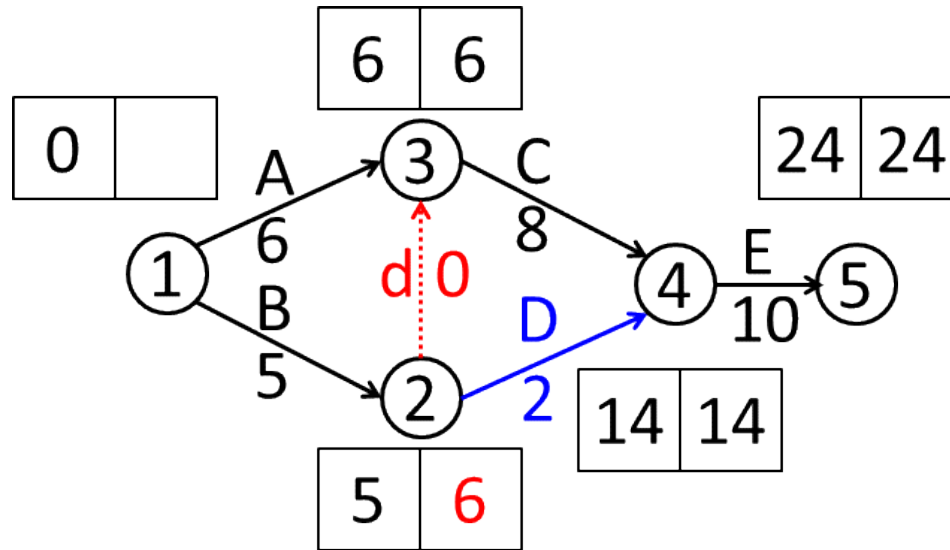
特性値の算出

最遅節点時刻



特性値の算出

最遅節点時刻

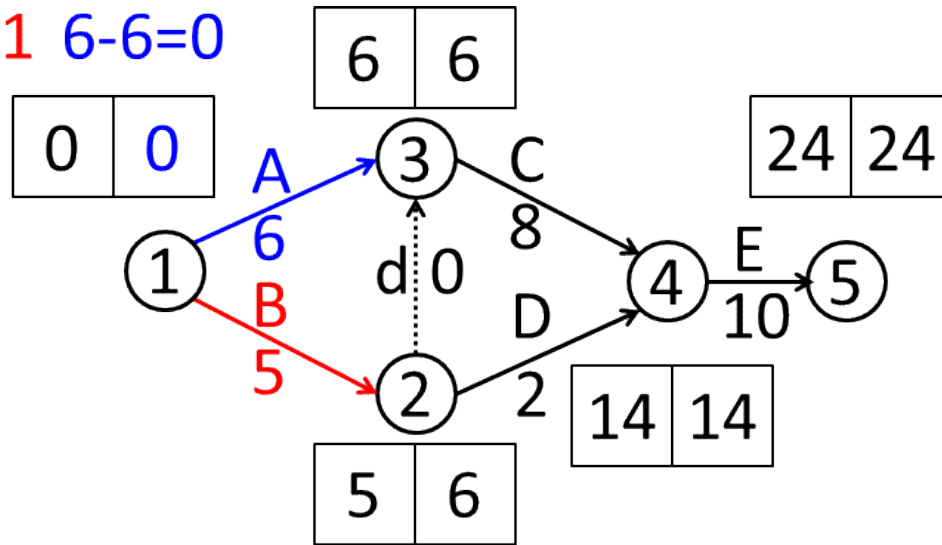


$$6-0=6 \quad 14-2=12$$

特性値の算出

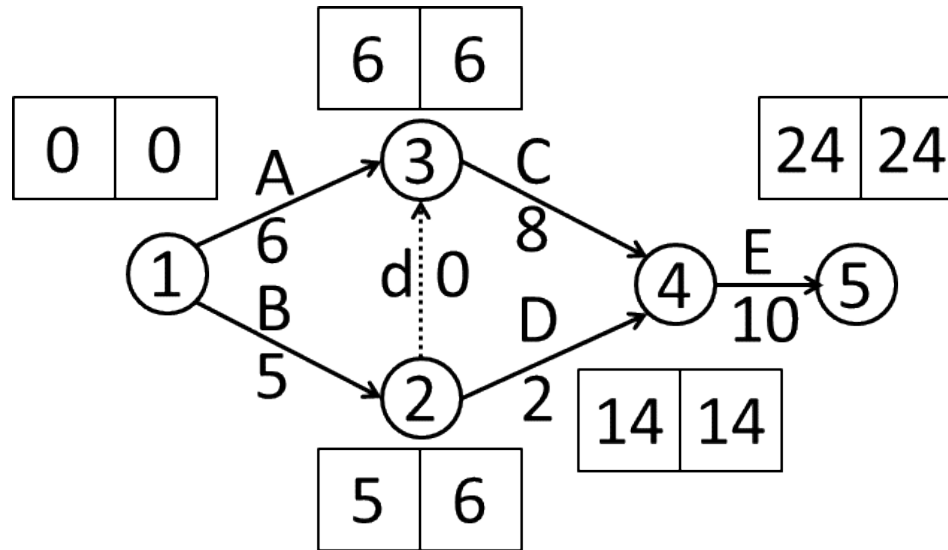
最遅節点時刻

$6-5=1$ $6-6=0$



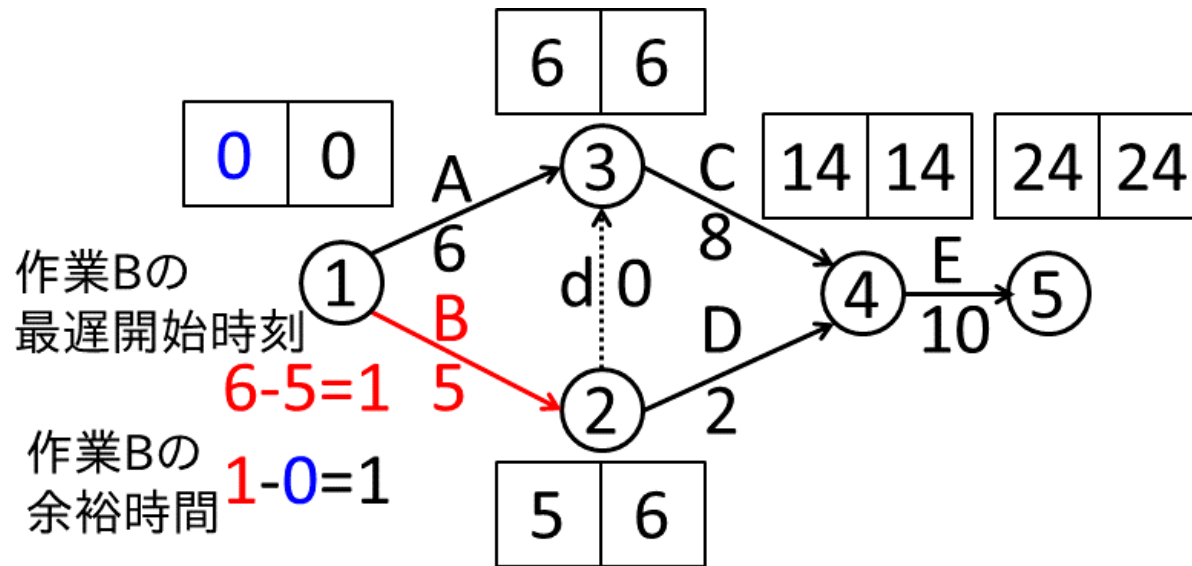
特性値の算出

最早開始時刻, 最遅開始時刻, 余裕時間



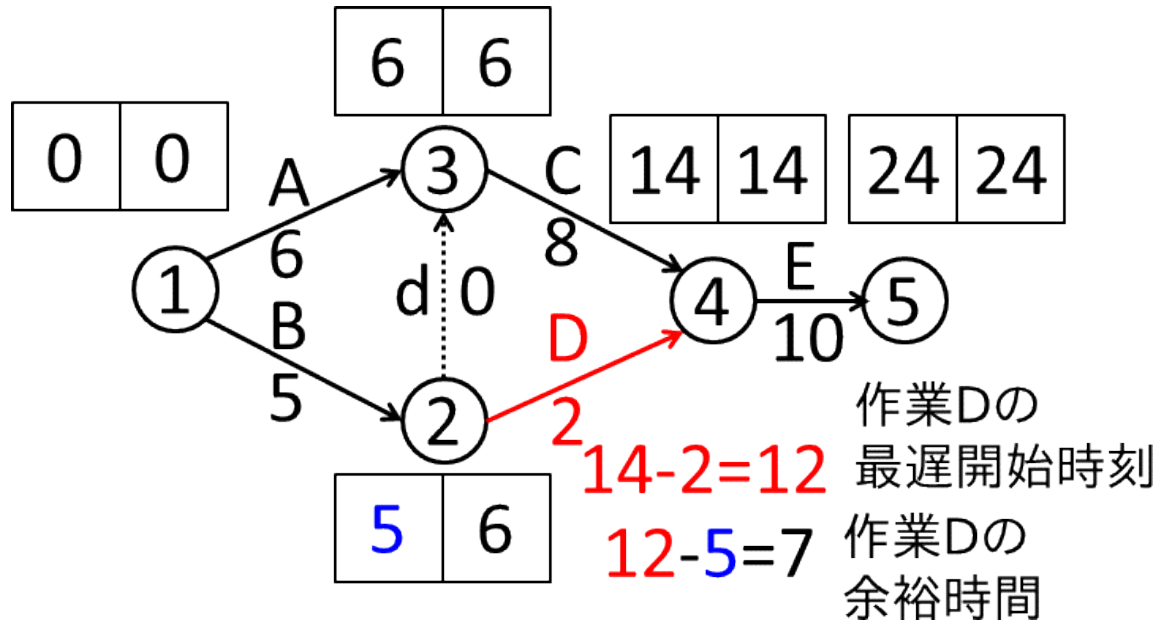
特性値の算出

最早開始時刻, 最遅開始時刻, 余裕時間



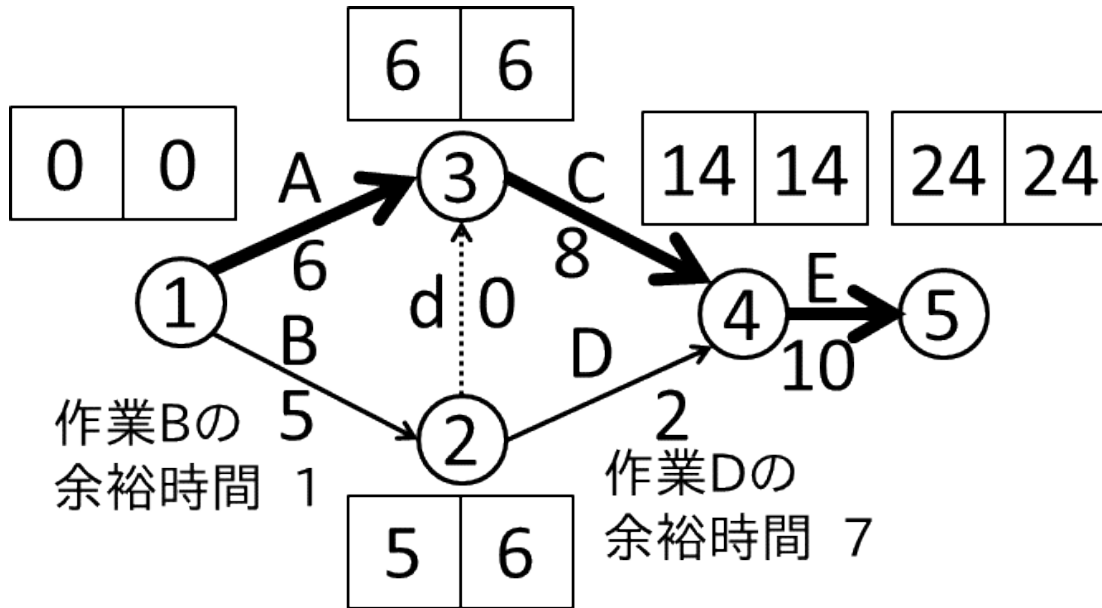
特性値の算出

最早開始時刻, 最遅開始時刻, 余裕時間



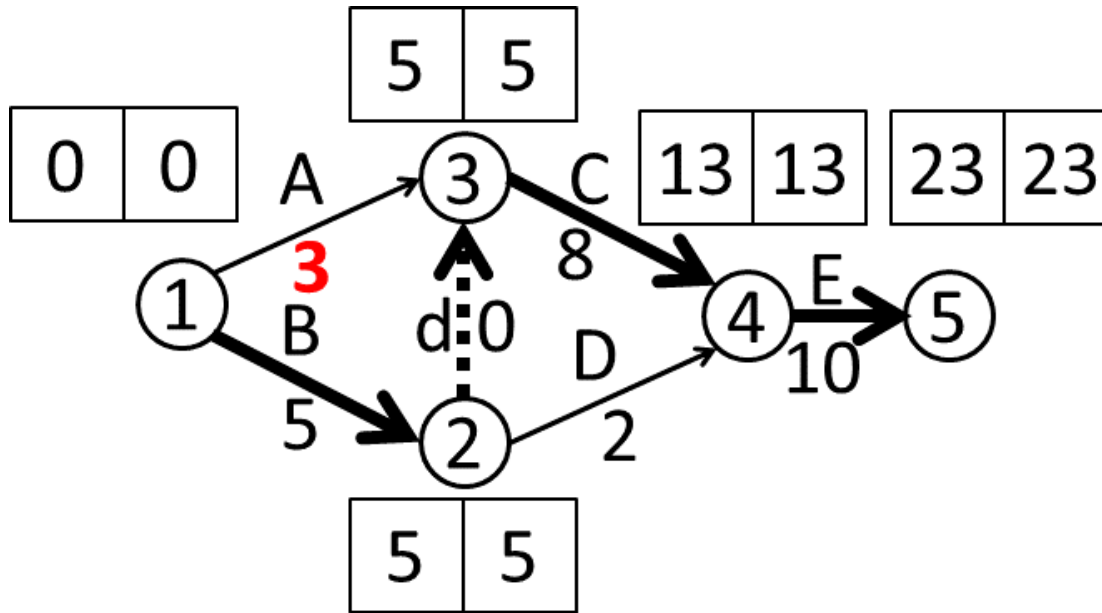
特性値の算出

クリティカルパス



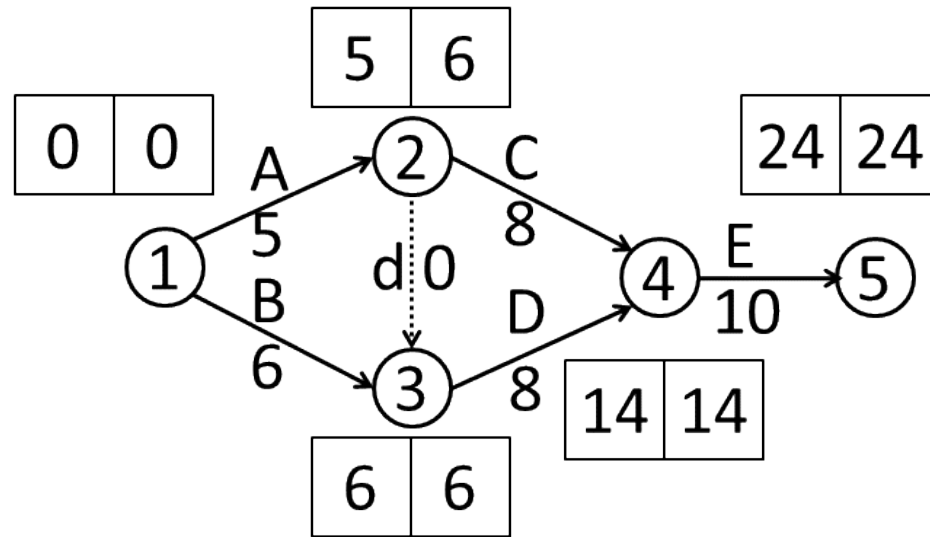
特性値の算出

クリティカルパス



最小費用によるプロジェクトの時間短縮

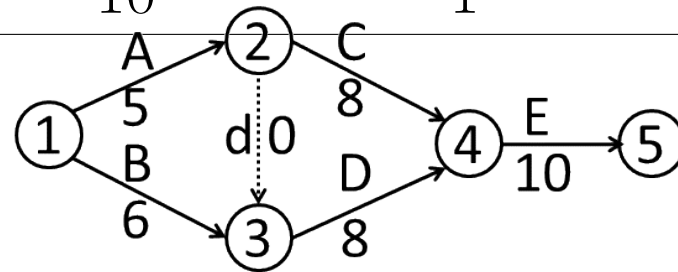
最小費用によるプロジェクトの時間短縮



クリティカルパス B → D → E

最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	標準時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	8	1	1
E	C, D	10	1	4

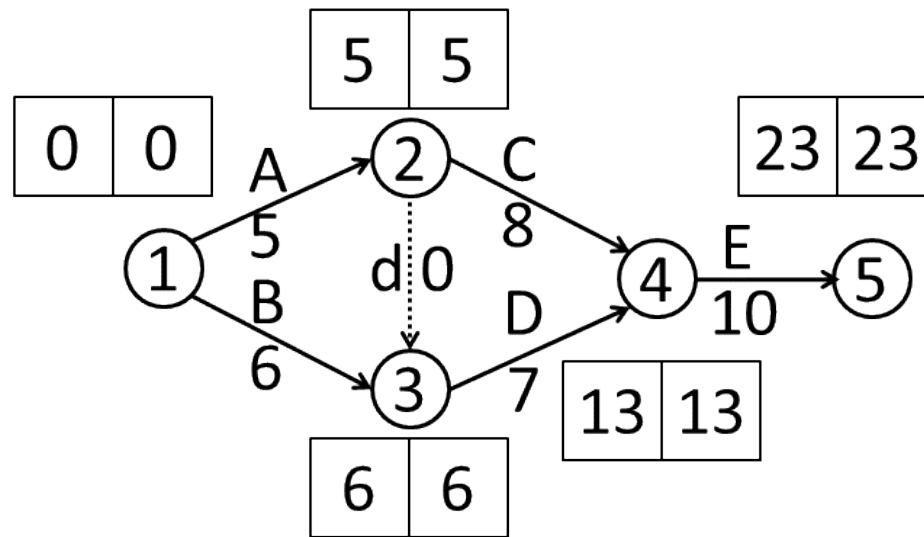


最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	標準時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
B	-	6	2	3
D	A, B	8	1	1
E	C, D	10	1	4

- プロジェクト完了までの時間を短縮可能な作業の組み合わせ … カット
({B}, 3), ({D}, 1), ({E}, 4)
- 費用が最小なカット … 最小カット ({D}, 1)

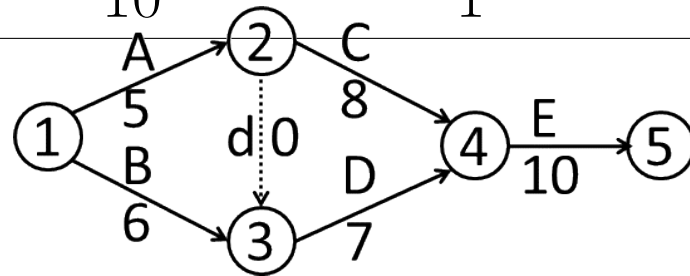
最小費用によるプロジェクトの時間短縮



クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E$, $A \rightarrow C \rightarrow E$

最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	10	1	4

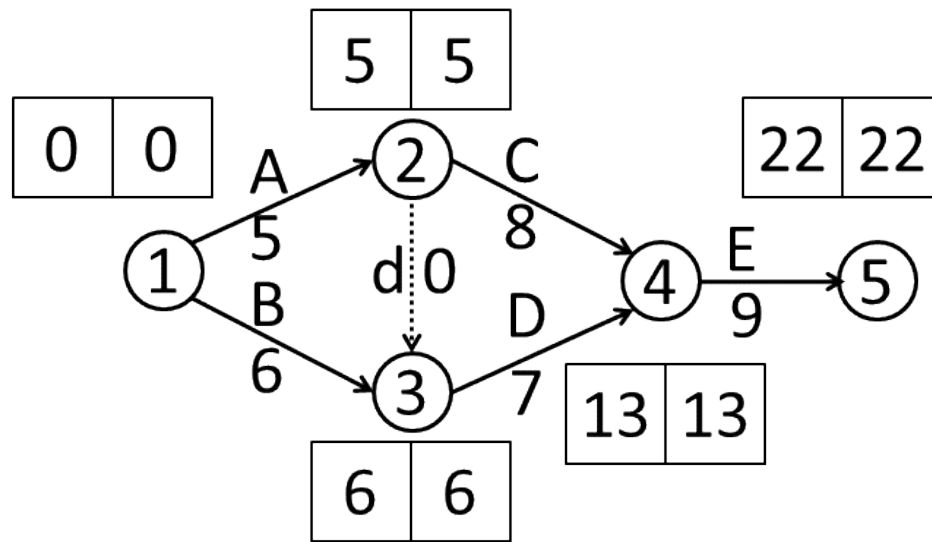


最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	10	1	4

- クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E, A \rightarrow C \rightarrow E,$
- カット $(\{B, A\}, 3 + 2), (\{B, C\}, 3 + 5), (\{E\}, 4)$
- 最小カット $(\{E\}, 4)$

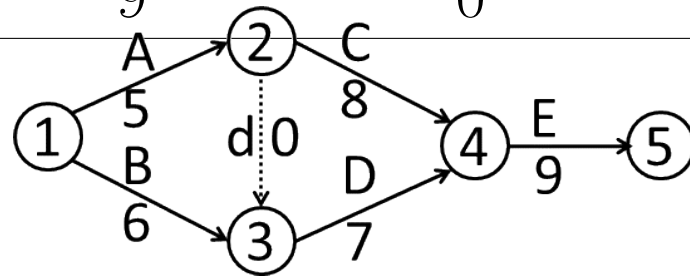
最小費用によるプロジェクトの時間短縮



クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E$, $A \rightarrow C \rightarrow E$

最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	9	0	-

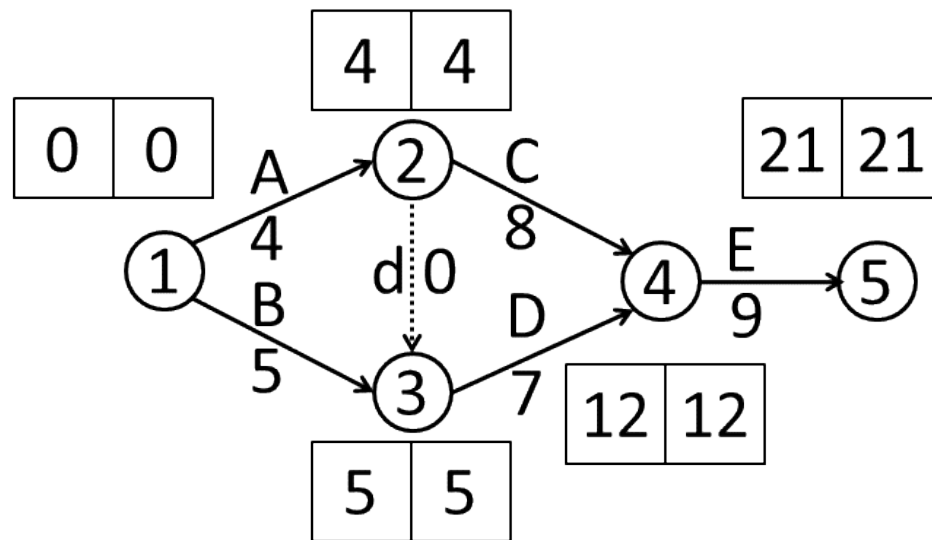


最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	9	0	-

- クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E, A \rightarrow C \rightarrow E,$
- カット $(\{B, A\}, 3 + 2), (\{B, C\}, 3 + 5)$
- 最小カット $(\{B, A\}, 5)$

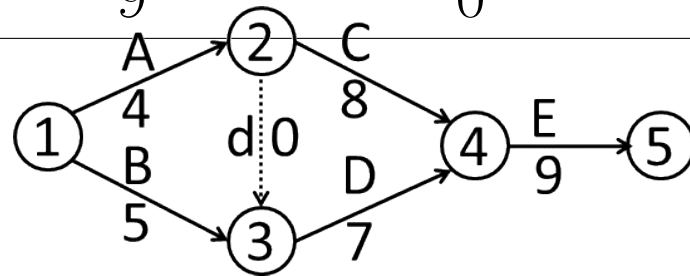
最小費用によるプロジェクトの時間短縮



クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E$, $A \rightarrow C \rightarrow E$

最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	4	1	2
B	-	5	1	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	9	0	-

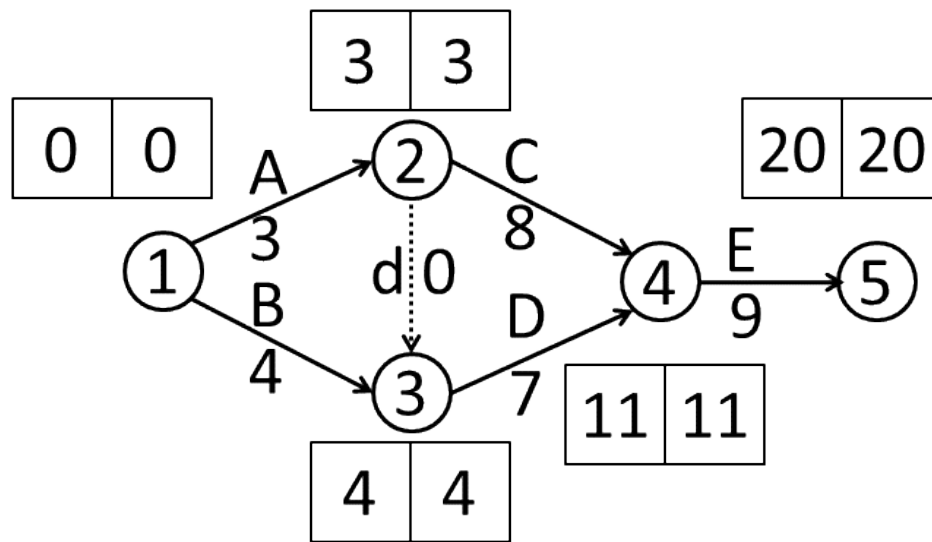


最小費用によるプロジェクトの時間短縮

記号	先行作業	作業時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	4	1	2
B	-	5	1	3
C	A	8	2	5
D	A, B	7	0	-
E	C, D	9	0	-

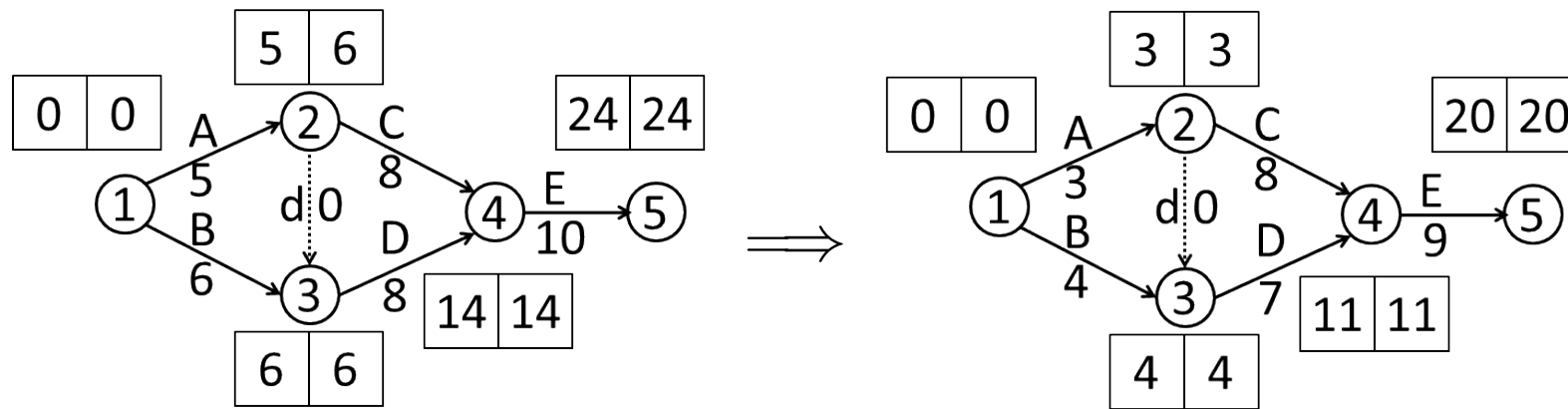
- クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E, A \rightarrow C \rightarrow E,$
- カット $(\{B, A\}, 3 + 2), (\{B, C\}, 3 + 5)$
- 最小カット $(\{B, A\}, 5)$

最小費用によるプロジェクトの時間短縮



クリティカルパス $B \rightarrow D \rightarrow E$, $A \rightarrow C \rightarrow E$

最小費用によるプロジェクトの時間短縮

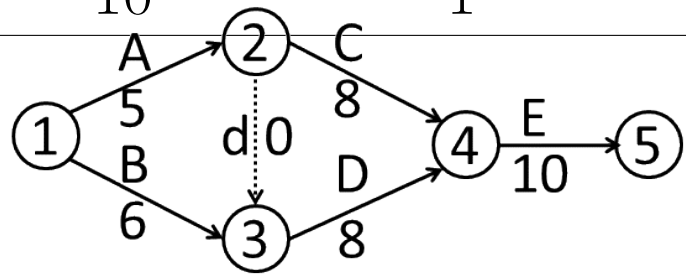


- $(\{D\}, 1)$, $(\{E\}, 4)$, $(\{B, A\}, 3 + 2)$, $(\{B, A\}, 3 + 2)$ の作業を費用をかけて短縮
- 費用は $1 + 4 + 5 + 5 = 15$ (万円)

線形最適化問題としての定式化

線形最適化問題としての定式化

記号	先行作業	標準時間 (時間)	短縮可能時間 (時間)	費用/時間 (万円/時間)
A	-	5	2	2
B	-	6	2	3
C	A	8	2	5
D	A, B	8	1	1
E	C, D	10	1	4



線形最適化問題としての定式化

- 点 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の最早節点時刻を x_i
- 作業 $j \in \{A, B, C, D, E\}$ の短縮時間を s_j
- 短縮費用の合計 z (万円) は

$$z = \sum_j s_j = 2s_A + 3s_B + 5s_C + s_D + 4s_E$$

線形最適化問題としての定式化

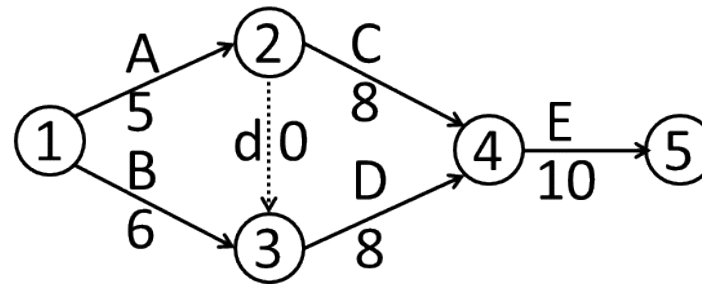
点1の最早節点時刻

$$x_1 = 0$$

点2の最早節点時刻

- 作業Aの作業時間が $5 - s_A$

$$x_2 = x_1 + (5 - s_A)$$



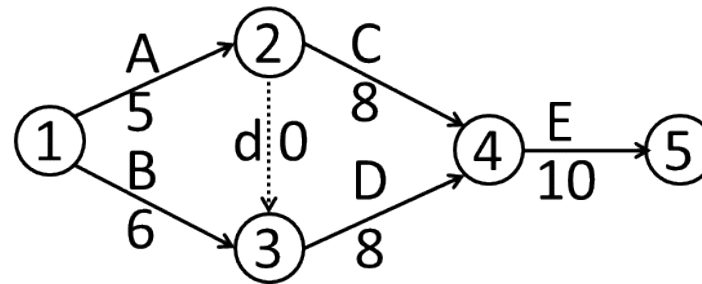
線形最適化問題としての定式化

点3の最早節点時刻

$$x_3 = \max\{x_2, x_1 + (6 - s_B)\}$$

↓

$$x_3 \geq x_2, \quad x_3 \geq x_1 + (6 - s_B)$$



線形最適化問題としての定式化

点4の最早節点時刻

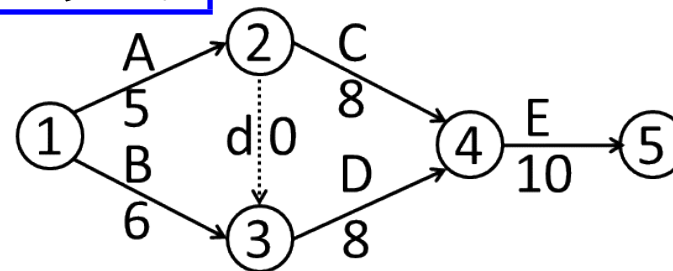
$$x_4 \geq x_2 + (8 - s_C), \quad x_4 \geq x_3 + (8 - s_D)$$

点5の最早節点時刻

$$x_5 = x_4 + (10 - s_E)$$

プロジェクトは20時間以内で完了

$$x_5 \leq 20$$



線形最適化問題としての定式化

最小化 $z = 2s_A + 3s_B + 5s_C + s_D + 4s_E$

制約条件 $x_1 = 0$

$$x_2 = x_1 + (5 - s_A)$$
$$x_3 \geq x_2, \quad x_3 \geq x_1 + (6 - s_B)$$
$$x_4 \geq x_2 + (8 - s_C), \quad x_4 \geq x_3 + (8 - s_D)$$
$$x_5 = x_4 + (10 - s_E)$$
$$x_5 \leq 20$$
$$0 \leq s_A \leq 2, \quad 0 \leq s_B \leq 2, \quad 0 \leq s_C \leq 2,$$
$$0 \leq s_D \leq 1, \quad 0 \leq s_E \leq 1$$