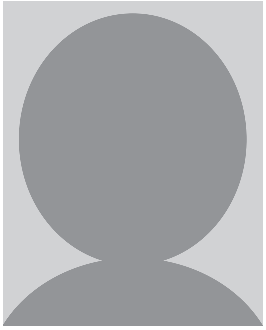
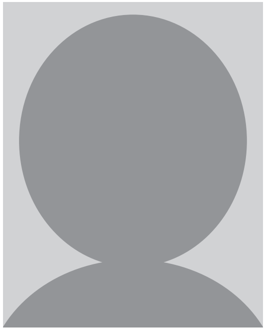
問題解決の数理（’１７）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.

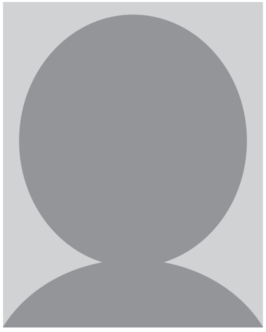


- 今回の講義では，階層分析法と呼ばれる意思決定支援の手法についてお話します.
- 複数の選択肢の中から 1 つを選択する時，様々な要因を考慮して選択を行います.
- 例えば，情報機器を購入する際には，機能，デザイン，価格などを考慮して購入する機器を選択するでしょう



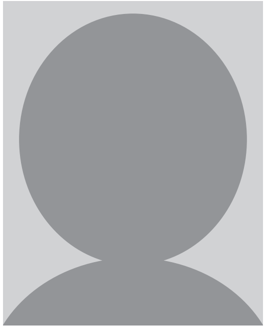
- ここで，選択肢のことを「代替案」[1], 選択に影響を与える要因のことを「評価基準」[2]と呼ぶことにします．
- 選択の際に考慮する複数の評価基準のすべてが最良であるような理想的な代替案が存在することは稀である... と言うとやや大げさかもしれませんが，多くの場合，ある評価基準に関しては評価が高く，別の評価基準に関しては評価が低い代替案を比較して，選択をしなくてはなりません．

[1] テロップ
[2] テロップ

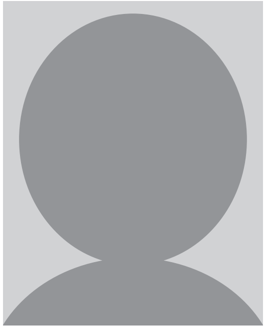


- 例えば，情報機器の選択において，ある製品は高機能で値段も安いけど，デザインが気に入らない，別の製品はデザインは良いのだけど，機能が劣り，その割には値段が高いというような状況です．
- 階層分析法は，複数の評価基準からなる代替案の選択問題において，問題を「問題」[3]，「評価基準」[4]，「代替案」[5]の階層に分け，各階層において比較評価を行い，総合評価にまとめる手法です．

[5] テロップ



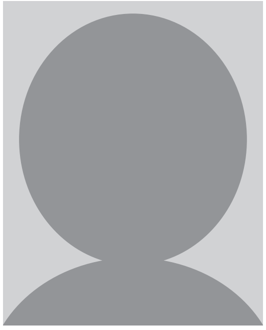
- 階層分析法の数学的手続きはシンプルですが，買物や進路決定といった個人の意思決定だけでなく，商品開発，営業企画，人事評価，政策決定，都市計画，エネルギー・環境問題，紛争解決など様々な課題に適用されています．



- 有名な事例として，１９９６年から翌年にかけて起きた，在ペルー日本大使公邸占拠事件で，政府の取るべき行動を階層分析法で検討したというものがあります.
- なお，階層分析法はＡＨＰ[6]と略称で呼ばれることが多いので，これ以降ＡＨＰと呼ぶことにします.
- それでは，ＡＨＰによる決定の過程を，アパートの選択を例として説明していきます.

[6]「AHP (Analytic Hierarchy Process)」とテロップ

ＡＨＰによる決定の過程 (1): 概要



- 次のような例を考えます.
- 郊外に自宅を持つ会社員の X さんは，この先 1, 2 年は仕事が忙しくなるので，勤務先に近い場所にアパートを借りることにしました.
- 週末は自宅に帰り， アパートは寝に帰るだけなので，部屋の広さや設備は最低限で構いません.
- X さんの希望は，勤務先から近く，できればきれいで，家賃が安い物件です.

概要

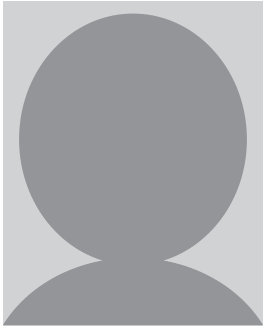
アパートの選択

	所要時間	きれいさ	家賃
物件 A	徒歩 5 分	汚い	10 万円
物件 B	徒歩 10 分	きれい	8 万円
物件 C	徒歩 20 分	普通	6 万円

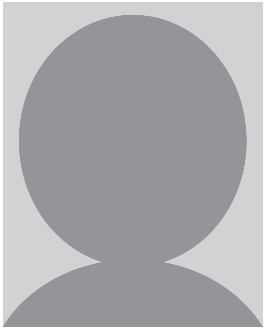
- 物件を探した結果，X さんの要求基準を満たしているものはここに示す 3 物件でした．
- そこで，これら 3 物件の中から借りるアパートを決定します．
- 物件 A は勤務先まで徒歩 5 分と，3 物件中最も近いのですが，部屋は汚く，家賃も 10 万円で一番高いです．
- 物件 B は，勤務先まで徒歩 10 分で 3 物件中 2 番目で，部屋はきれいで，家賃は 8 万円でこれも 2 番目です．

- 物件 C は，勤務先まで徒歩 20 分かかり，3 物件中一番遠いのですが，部屋はそれほど汚くなく，家賃は 6 万円で 3 物件中一番安いです．
- （ポーズ）

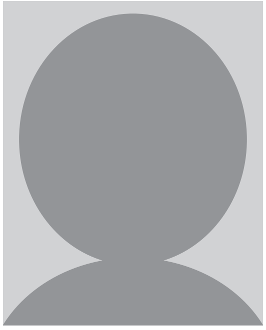
- このアパートの選択は，勤務先までの所要時間，部屋のきれいさ，家賃を評価基準として，3 つの物件から 1 つを選択します．
- これらの中に，すべての評価基準で最良となる物件はありません．
- その場合，評価基準の重要度を考慮し，物件の各評価基準の評価値を，評価基準の重要度で重みをつけて，総合的な評価を行う…ということが考えられます．



- このように総合評価を行うには，評価基準の重要度や各評価基準の評価値を数値化する必要があります．
- 評価基準の重要度や評価値は必ずしも客観的に存在する訳ではありません．
- Ｘさんがアパートを選ぶ場合も，どの評価基準が重要であるかは，客観的に決まっている訳でなく，Ｘさんが何を重要視しているかによる，主観的なものです．
- また，各評価基準の評価値についても，必ずしも客観的な値が存在するとは限りません．



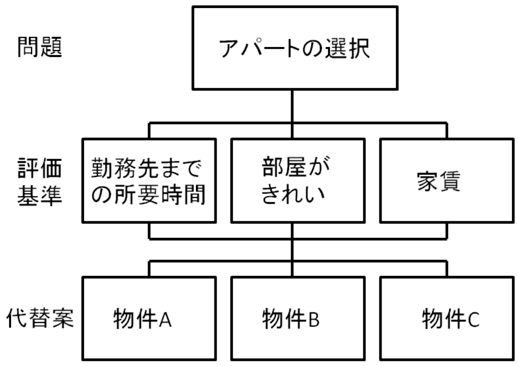
- 勤務先までの所要時間や家賃の金額自体は客観的な数値ではありますが，評価値はＸさんにとってどれだけ価値があるかという主観的なものです．
- 評価値は時間や金額に比例したり，一次関数の関係にあるとは限りません．
- また，この例では３物件だけですが，多くの代替案，例えば１０件程度の代替案の特定の評価基準に関して，５段階や７段階，あるいは１０段階で評価するのは，実はかなり大変です．



- これは実際やってみないと実感がわかないかもしれませんが，評価する本人が，これ以上修正の必要はないと納得できるような評価を行うのは決して簡単ではありません．
- ＡＨＰはこれらの問題を含む意思決定を支援する方法です．

概要

階層化



- AHP による決定の特徴は，先ほども言いましたように，問題を「問題」,「評価基準」,「代替案」の階層に分けて評価を行うことです.
- アパートの選択であれば,「問題」は好ましいアパートの選択です.
- 評価基準は「勤務先までの所要時間」「部屋のきれいさ」「家賃の安さ」です.
- 代替案は物件 A，物件 B，物件 C です.
- 階層に分けて評価を行うことにより，評価の複雑性を下げることができます.

概要

一対比較

A v.s. B 3	A v.s. C 3	A v.s. D 5
B v.s. C 3	B v.s. D 3	C v.s. D 7

定義	点
同程度重要	1
やや重要	3
重要	5
非常に重要	7
絶対的に重要	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

- また，評価基準や代替案の評価に一対比較法を用いることも大きな特徴です．
- 一対比較法とは，複数の対象を評価する時に，対象を 2 個ずつペアにして，2 個の対象のどちらがどれだけ重要であるとか，どちらがどれだけ好ましいといった比較判断を繰り返すことにより，すべての対象の重要さとか好ましさの序列化や尺度化を行う手法のことです．
- 4 つの対象 A, B, C, D を一対比較法で評価する場合，A と B, A と C, A と D, B と C, B と D, C と D を比較します．

- ペアのうちどちらの対象の方が重要かといった比較に加え，その程度を数値で評価します．
- 例えば，A と B の評価で B に 3 という数値がついていますが，B は A よりやや重要ということを表しています．
- また，C と D の評価で D に 7 という数値がついていますが，D は C より非常に重要ということを表しています．
- ここでは，奇数の値にのみ評価語を割り当てていて，偶数の値はそれらの中間の評価に用いています．

- 評価語の数や数値の範囲は問題により異なりますが，ここに示しているような評価語と数値を対応させるのが一般的です．
- 2 つの対象を比較するのは，個々の対象の重要性を評価したり，対象を重要性により序列化するのに比べてると簡単ですので，一対比較法は重要性や好ましさの序列化や数値化に広く適用されています．

- また，微妙な差の対象の序列化、尺度化も可能です.
- そのため，AHP においては評価基準の重要性や代替案の評価に一対比較法を用いています.
-

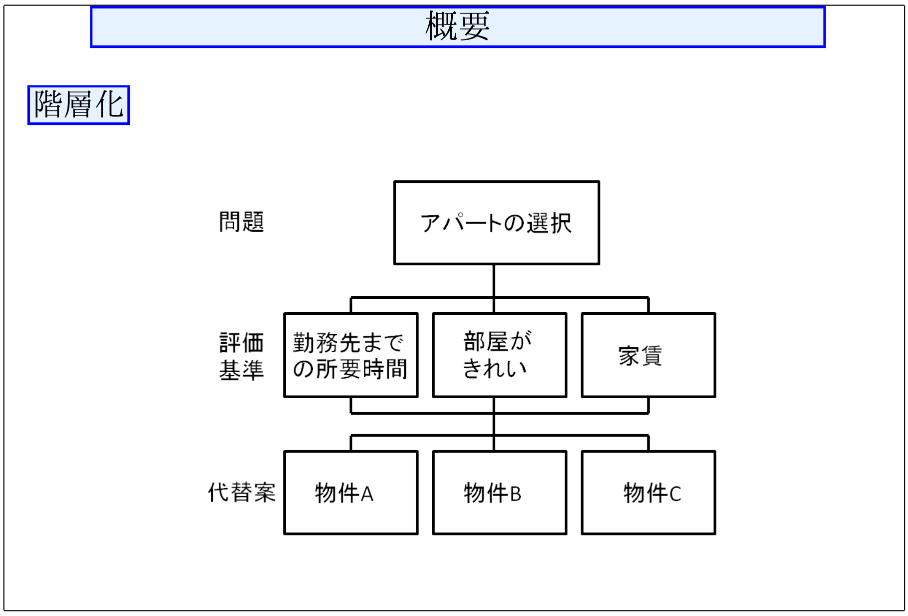
概要

AHP の手順

1. 問題を階層構造に分解
2. 各階層において要素間の一対比較を行い，一対比較行列を作成
3. 一対比較行列から各要素の重み (重要度) を計算
4. 各要素の重要度を統合し，総合的な評価を計算

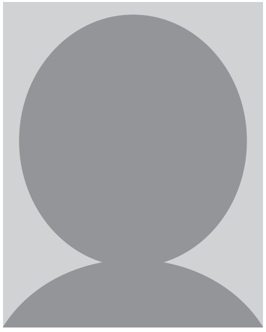
- AHP の手順の概要を示します.
- まず，問題を「問題」,「評価基準」,「代替案」の階層に分解します.
- 次に,「問題」の階層を除く，各階層において，その階層の要素間で一対比較を行い，一対比較行列を作成します.
- そして，一対比較行列から，各要素の重み，あるいは重要度を計算します.

- 最後に重み，重要度を統合して，総合的な評価を計算します.
- このように言いますと，一回で評価が終了するように思われるかもしれませんが，一対比較の結果が整合的でない，すなわち整合的な評価ができていない時には，一対評価をやり直したり，場合によっては階層構造自体を構成し直したりします.
- それでは，アパートの選択を例に手続きを説明していきます.



- AHP の最初のステップである階層化は，既に示しましたが，このようにすることとととします．
- この問題においては，問題文に評価基準が与えられていて，評価基準は３つだけですので，この構造はほぼ自明と言えますが，実際には，評価基準を抽出することも重要な作業になります．
- 数理的な手続きについては，次にお話します．

AHPによる決定の過程 (2): 一対比較



- 次のステップは，一対比較です．
- まず，3 つの評価基準の間で一対比較を行います．

一対比較

評価基準

定義	点
同程度重要	1
やや重要	3
重要	5
非常に重要	7
絶対的に重要	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

	所要時間	きれいさ	家賃
所要時間	1	7	
きれいさ	1/7	1	
家賃			1

- 評価基準は，勤務先までの所要時間，部屋のきれいさ，家賃の安さでした．
- 評価基準の重要性に関して，一対比較を行います．
- まず，勤務先までの所要時間と部屋のきれいさの重要性を比較します．
- X さんは，勤務先までの所要時間を，部屋のきれいさと比べて非常に重要と考えているとします．
- その場合，所要時間の行ときれいさの列に対応する成分は，左に示した評価語に対応する 7 とします．
- 逆に，部屋のきれいさは，勤務先までの所要時間に比べて，非常に重要でない訳ですが，その場合 1/7 とします．
- この表，... これは作りかけの一対比較行列ですが...
- 一対比較行列の対角線を挟んで対称な位置の要素同士は互いに逆数とします．

一対比較

評価基準

定義	点
同程度重要	1
やや重要	3
重要	5
非常に重要	7
絶対的に重要	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

	所要時間	きれいさ	家賃
所要時間	1	7	3
きれいさ	1/7	1	
家賃	1/3		1

- 次に，勤務先までの所要時間と家賃の安さの重要性を比較します．
- X さんは，勤務先までの所要時間のほうが，家賃の安さよりやや重要と考えているとします．
- その場合，所要時間の行と家賃の列に対応する成分は，左に示した評価語に対応する 3 とします．
- 対角線を挟んで対称な位置には逆数の 1/3 が入ります．

一対比較

評価基準

定義	点
同程度重要	1
やや重要	3
重要	5
非常に重要	7
絶対的に重要	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

	所要時間	きれいさ	家賃
所要時間	1	7	3
きれいさ	1/7	1	1/3
家賃	1/3	3	1

- 最後に，部屋のきれいさと家賃の安さの重要度を比較します．
- X さんは，部屋のきれいさは，家賃の安さと比べると，やや重要でないと考えているとします．
- その場合，きれいさの行と家賃の列に対応する成分は，左に示した評価語に対応する 1/3 とします．
- 対角線を挟んで対称な位置には逆数の 3 が入ります．
- 以上で，評価基準の一対比較行列が出来上がりました．

一対比較

評価基準

定義	点
同程度重要	1
やや重要	3
重要	5
非常に重要	7
絶対的に重要	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

	所要時間	きれいさ	家賃
所要時間	1	7	3
きれいさ	1/7	1	1/3
家賃	1/3	3	1

- 長々と話しましたが，この問題において，評価基準の重要性の評価は，
  - 「所要時間ときれいさの比較」
  - 「所要時間と家賃の比較」
  - 「きれいさと家賃の比較」

  の 3 回の比較を行うだけです．
- 対角線を挿んで対称な位置の成分は，自動的に決まりますので，あらためて評価を行うことはしません．

一対比較

代替案（所要時間）

定義	点
同程度に好ましい	1
やや好ましい	3
好ましい	5
非常に好ましい	7
絶対的に好ましい	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

所要時間		
物件 A	物件 B	物件 C
5 分	10 分	20 分

	物件 A	物件 B	物件 C
物件 A	1	5	7
物件 B	1/5	1	5
物件 C	1/7	1/5	1

- 次に，代替案の一対比較を行います．
- 代替案の一対比較は，評価基準ごとに行いますので，まず勤務先までの所要時間に関して，物件間で一対比較を行います．
- 物件 A は勤務先まで徒歩 5 分で，物件 B は徒歩 10 分かかりますので，X さんは，所要時間に関して，物件 A は物件 B より重要，この場合，好ましいという言葉の方が適当でしょうから，好ましいという評価語を使うことにしましょう．
- 言い直しますと，X さんは，所要時間に関して，物件 A は物件 B より好ましいと考えていたとします．
- その場合，物件 A の行，物件 B の列の成分は 5 とします．

一対比較

代替案（所要時間）

定義	点
同程度に好ましい	1
やや好ましい	3
好ましい	5
非常に好ましい	7
絶対的に好ましい	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

所要時間		
物件 A	物件 B	物件 C
5 分	10 分	20 分

	物件 A	物件 B	物件 C
物件 A	1	5	7
物件 B	1/5	1	5
物件 C	1/7	1/5	1

- 次に，物件 A と物件 C を比較します．
- 物件 A は勤務先まで徒歩 5 分で，物件 C は徒歩 20 分かかりますので，X さんは，所要時間に関して，物件 A は物件 C より非常に好ましいと考えていたとします．
- その場合，物件 A の行，物件 C の列の成分は 7 とします．

一対比較

代替案（所要時間）

定義	点
同程度に好ましい	1
やや好ましい	3
好ましい	5
非常に好ましい	7
絶対的に好ましい	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

所要時間		
物件 A	物件 B	物件 C
5 分	10 分	20 分

	物件 A	物件 B	物件 C
物件 A	1	5	7
物件 B	1/5	1	5
物件 C	1/7	1/5	1

- 次に，物件 B と物件 C を比較します．
- 物件 B は勤務先まで徒歩 10 分で，物件 C は徒歩 20 分かかりますので，X さんは，所要時間に関して，物件 B は物件 C より好ましいと考えていたとします．
- その場合，物件 B の行，物件 C の列の成分は 5 とします．
- 以上で，勤務先までの所要時間に関して，物件間での一対比較が終わりました．
- 評価基準間の比較と同様， 対角線を挿んで対称な位置には逆数が入ります．

一対比較

代替案（きれいさ）

定義	点
同程度に好ましい	1
やや好ましい	3
好ましい	5
非常に好ましい	7
絶対的に好ましい	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

きれいさ		
物件 A	物件 B	物件 C
汚い	きれい	普通

	物件 A	物件 B	物件 C
物件 A	1	1/5	1/3
物件 B	5	1	3
物件 C	3	1/3	1

- 今度は，部屋のきれいさに関して，物件間で一対比較を行います．
- やり方は，勤務先までの所要時間と同じ要領です．
- 物件 A は汚い，物件 B はきれい，物件 C は普通です．

- X さんは，部屋のきれいさに関して，
  - 物件 A は物件 B より好ましくない，
  - 物件 A は物件 C よりやや好ましくない，
  - 物件 B は物件 C よりやや好ましい，

  と考えたとします．
- その場合，ここに示すような一対比較行列になります．

一対比較

代替案（家賃）

定義	点
同程度に好ましい	1
やや好ましい	3
好ましい	5
非常に好ましい	7
絶対的に好ましい	9
2, 4, 6, 8 は中間の評価	

家賃		
物件 A	物件 B	物件 C
10 万円	8 万円	6 万円

	物件 A	物件 B	物件 C
物件 A	1	1/3	1/7
物件 B	3	1	1/5
物件 C	7	5	1

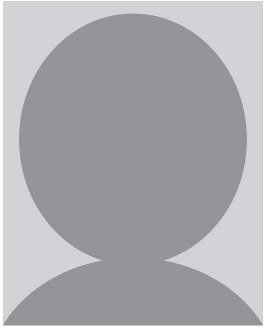
- 最後に，家賃に関して，物件間で一対比較を行います．
- 家賃は，物件 A が 10 万円，物件 B が 8 万円，物件 C が 6 万円です．
- X さんは，家賃に関して，
  - 物件 A は物件 B よりやや好ましくない，
  - 物件 A は物件 C より非常に好ましくない，
  - 物件 B は物件 C より好ましくない，

  と考えたとします．

- その場合，ここに示すような一対比較行列になります．
- 以上で，すべての一対比較が終わりました．

AHPによる決定の過程 (3):

重要度の計算と総合評価



- 次のステップでは，一対比較の結果から各要素の重要度，文脈によっては重みと言った方が適切かもしれませが，重要度を計算します．
- 重要度の計算法は幾つか提案されていますが，ここでは幾何平均による計算を行います．

重要度の計算と総合評価

幾何平均

- $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の幾何平均

$$(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_m)^{1/m}$$

- m 個の数，$x_1, ..., x_m$ の幾何平均は，x_1 から x_m をかけて，その m 乗根と定義されます．
- m 個の数の和を m で割る，算術平均でなく，幾何平均を用いるのは，重要度が比で評価されるためです．

重要度の計算と総合評価

	要素 1	要素 2	要素 3	幾何平均
要素 1	1	a_{12}	a_{13}	$(1 \times a_{12} \times a_{13})^{1/3} = \mu_1$
要素 2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	$(1/a_{12} \times 1 \times a_{23})^{1/3} = \mu_2$
要素 3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	$(1/a_{13} \times 1/a_{23} \times 1)^{1/3} = \mu_3$
幾何平均の合計				$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$

重要度

要素 1	μ_1/μ
要素 2	μ_2/μ
要素 3	μ_3/μ

- 幾何平均に基づく重要度の計算は次のようにします．
- 評価基準でも代替案でもいいのですが，３つの要素を一対比較した結果，上の左の表に示す一対比較行列を得たとします．
- まず，一対比較行列の要素 1 の行の成分の幾何平均を求めます．
- 要素 1 の行の成分は，$1, a_{12}, a_{13}$ ですから，これらの幾何平均は，$1 \times a_{12} \times a_{13}$ の $1/3$ 乗，立方根となります．この値を μ_1 とします．
- 同様に，要素 2 の行の成分は，$1/a_{12}, 1, a_{23}$ ですから，これらの幾何平均は，$1/a_{12} \times 1 \times a_{23}$ の $1/3$ 乗となります．この値を μ_2 とします．
- 同様に，要素 3 の行の成分は，$1/a_{13}, 1/a_{23}, 1$ ですから，これらの幾何平均は，$1/a_{13} \times 1/a_{23} \times 1$ の $1/3$ 乗となります．この値を μ_3 とします．
- μ_1, μ_2, μ_3 が，各々要素 1, 要素 2, 要素 3 の相対的な重要性を反映していることは直感的にも明らかです．
- ここで，重要度の和が 1 になるように，μ_1, μ_2, μ_3 の和 μ で，μ_1, μ_2, μ_3 を割ったものを，要素 1，要素 2，要素 3 の重要度とします．
-

重要度の計算と総合評価

	所要時間	きれいさ	家賃	幾何平均
所要時間	1	7	3	$(1 \times 7 \times 3)^{1/3} \fallingdotseq 2.76$
きれいさ	1/7	1	1/3	$(1/7 \times 1 \times 1/3)^{1/3} \fallingdotseq 0.36$
家賃	1/3	3	1	$(1/3 \times 3 \times 1)^{1/3} = 1$
幾何平均の合計				$2.76 + 0.36 + 1 = 4.12$

重要度

所要時間	$2.76/4.12 \fallingdotseq 0.67$
きれいさ	$0.36/4.12 \fallingdotseq 0.09$
家賃	$1 \quad /4.12 \fallingdotseq 0.24$

- それでは，アパートの選択問題における，評価基準の重要度を計算してみましょう．
- X さんは，勤務先までの所要時間は，部屋のきれいさより非常に重要で，家賃の安さよりやや重要と考えていました．
- また，部屋のきれいさより家賃の安さがやや重要と考えていました．
- その結果，上の左の表に示す一対比較行列が得られました．

- 各評価基準の幾何平均は上の右の表に示すように計算されます．
- 各評価基準の幾何平均をこれらの和で割った重要度は下の表に示すようになります．
- 当然のことですが，所要時間が最も重要で，部屋のきれいさが最も重要でないという評価を反映した値になっています．

重要度の計算と総合評価

	物件 A	物件 B	物件 C	幾何平均
物件 A	1	5	7	$(1 \times 5 \times 7)^{1/3} \fallingdotseq 3.27$
物件 B	1/5	1	5	$(1/5 \times 1 \times 5)^{1/3} = 1$
物件 C	1/7	1/5	1	$(1/7 \times 1/5 \times 1)^{1/3} \fallingdotseq 0.31$
幾何平均の合計				$3.27 + 1 + 0.31 = 4.58$

重要度

物件 A	$3.27/4.58 \fallingdotseq 0.71$
物件 B	$1\quad/4.58 \fallingdotseq 0.22$
物件 C	$0.31/4.58 \fallingdotseq 0.07$

- 代替案の重要度の計算方法も同じです．
- 勤務先の所要時間は，物件 A が一番短く，物件 C が一番長かったので，重要度もそれを反映した値になっていることをご確認ください．

重要度の計算と総合評価

	物件 A	物件 B	物件 C	幾何平均
物件 A	1	1/5	1/3	$(1 \times 1/5 \times 1/3)^{1/3} \fallingdotseq 0.41$
物件 B	5	1	3	$(5 \times 1 \times 3)^{1/3} \fallingdotseq 2.47$
物件 C	3	1/3	1	$(1/3 \times 3 \times 1)^{1/3} = 1$
幾何平均の合計				$0.41 + 2.47 + 1 = 3.88$

重要度

物件 A	$0.41/3.88 \fallingdotseq 0.11$
物件 B	$2.47/3.88 \fallingdotseq 0.64$
物件 C	$1\quad/3.88 \fallingdotseq 0.26$

- 部屋のきれいさは，物件 A が一番汚く，物件 B が一番きれいだったので，重要度もそれを反映した値になっています．

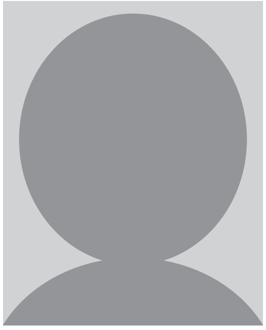
重要度の計算と総合評価

	物件 A	物件 B	物件 C	幾何平均
物件 A	1	1/3	1/7	$(1 \times 1/3 \times 1/7)^{1/3} \fallingdotseq 0.36$
物件 B	3	1	1/5	$(3 \times 1 \times 1/5)^{1/3} \fallingdotseq 0.84$
物件 C	7	5	1	$(7 \times 5 \times 1)^{1/3} \fallingdotseq 3.27$
幾何平均の合計				$0.36 + 0.84 + 3.27 = 4.47$

重要度

物件 A	$0.36/4.47 \fallingdotseq 0.08$
物件 B	$0.84/4.47 \fallingdotseq 0.19$
物件 C	$3.27/4.47 \fallingdotseq 0.73$

- 家賃は，物件 A が一番高く，物件 C が一番安かったので，重要度もそれを反映した値になっています．
- 以上で，重要度の計算がすべて終わりました．



- AHP の処理手順の最後は，各要素の重要度を統合して，総合的な評価を計算することです．
- さっそく，計算法を説明します．

重要度の計算と総合評価

総合評価

$w_j \ (j = 1, 2, \cdots, m)$　評価基準 j の重要度
$p_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$　代替案 i の評価基準 j における重要度

代替案 i の総合評価得点　$w_1 p_{i1} + w_2 p_{i2} + \cdots + w_m p_{im}$

- ここでは，問題，評価基準，代替案の 3 階層として，総合評価の計算法を説明します．
- 4 階層以上の場合でも，記号が異なるだけで，計算方法自体は同じです．
- 評価基準が m 個あるとして，評価基準 j の重要度を w_j とします．
- また，代替案が n 個あるとして，代替案 i の，評価基準 j における重要度を p_{ij} とします．
-
- このとき，代替案 i の総合評価得点は，代替案 i の各評価基準における重要度を，評価基準の重要度で重み付けした和として計算されます．
- 数式で書くと，

$$w_1 \times p_{i1} + w_2 \times p_{i2} + \text{中略} + w_m \times p_{im}$$

  となります．

- これは最もシンプルな考え方と言えるでしょう．
- それでは，各物件の総合評価を計算してみましょう．

重要度の計算と総合評価

	所要時間 0.67	きれいさ 0.09	家賃 0.24	総合評価
物件 A	0.71	0.11	0.08	
	$0.67 \times 0.71 + 0.09 \times 0.11 + 0.24 \times 0.08 = 0.5048$			
物件 B	0.22	0.64	0.19	
	$0.67 \times 0.22 + 0.09 \times 0.64 + 0.24 \times 0.19 = 0.2506$			
物件 C	0.07	0.26	0.73	
	$0.67 \times 0.07 + 0.09 \times 0.26 + 0.24 \times 0.73 = 0.2455$			

- 評価基準の重要度は赤い字で示してありますように，所要時間の重要度が 0.67，きれいさの重要度が 0.09，家賃の重要度が 0.24 でした．
- 代替案の重要度は青い字で示してあります．
- まず，物件 A の総合評価得点を計算します．
- 物件 A の，所要時間に関する重要度は 0.71，きれいさに関する重要度は 0.11，家賃に関する重要度は 0.08 でした．

- したがって，物件 A の総合評価得点は，

$$0.67 \times 0.71 + 0.09 \times 0.11 + 0.24 \times 0.08 = 0.5048$$

  となります．
- 物件 B の，所要時間に関する重要度は 0.22，きれいさに関する重要度は 0.64，家賃に関する重要度は 0.19 でした．
- したがって，物件 B の総合評価得点は，

$$0.67 \times 0.22 + 0.09 \times 0.64 + 0.24 \times 0.19 = 0.2506$$

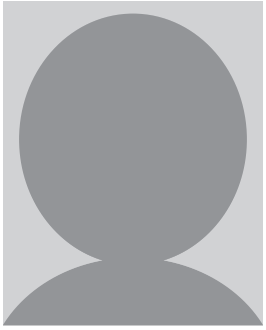
  となります．

- 物件 C の，所要時間に関する重要度は 0.07，きれいさに関する重要度は 0.26，家賃に関する重要度は 0.73 でした．
- したがって，物件 C の総合評価得点は，

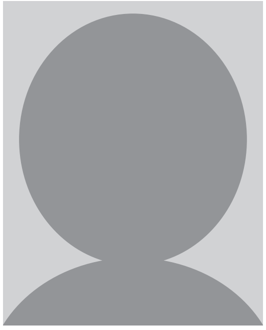
$$0.67 \times 0.07 + 0.09 \times 0.26 + 0.24 \times 0.73 = 0.2455$$

  となります．

- 3 物件の総合評価得点を比較しますと，物件 A が約 0.5 で，物件 B と物件 C は約 0.25 になります．したがって，物件 A が圧倒的に好ましいということになります．
- 以上で，AHP の基本的な手続きは完了です．

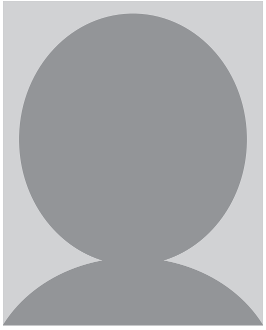


- 長々と説明してきましたが，ＡＨＰのユーザは，問題を階層構造に分解して，評価基準の一対比較と代替案の一対比較さえ行えば，計算は計算機に任せることができます．
- アパート選択の例では，３つの評価基準の一対比較において３回の比較を行い，３つの代替案の３つの評価基準に関する一対比較において，３×３回の比較を行なったので，合計１２回の比較を行いました．

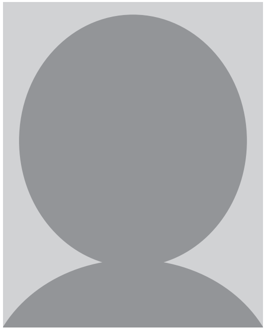


- 合計１２回の一対比較なら，それほどの手間ではありません．
- （ポーズ）
- ただし，一対比較で本当にちゃんとした評価ができたのでしょうか？
- この問題については，次に考えます．

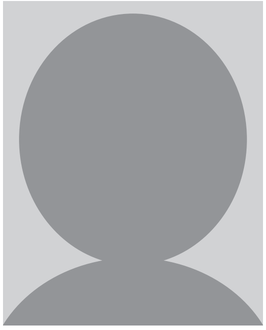
判断の整合性の確認と修正



- ＡＨＰでは，評価基準や代替案の重要度を一対比較により評価しました．
- 一対比較は容易に評価ができるのですが，果たして整合的な評価ができているかということが問題になります．
- 例えば，ある評価基準に関して，代替案Ａと代替案Ｂの比較では代替案Ｂをより好ましいと判断し，代替案Ｂと代替案Ｃの比較では代替案Ｃをより好ましいと判断して，次に代替案Ａと代替案Ｃの比較では代替案Ａをより好ましいと判断すると，３つの代替案に循環構造ができてしまいます．



- 循環構造とは，平たく言えば，じゃんけんのグーチョキパーのような三すくみの関係です．
- じゃんけんなら三すくみで良いのですが，３つの代替案を一次元の評価基準上で評価するという場合に三すくみでは困ります．
- 循環構造は極端な例ですが，一対比較においては整合的ではない評価が行われる可能性があります．



- ここでは，一対比較の整合性のチェックについてお話します.
- なお，行列の演算や固有値，固有ベクトルが出てきます.
- 行列の演算については，印刷教材の付録で簡単に説明してありますので，必要な方はご参照ください.

判断の整合性の確認と修正

完全に整合的な評価

重要度

$$\boldsymbol{w} = [w_1 \, w_2 \, \cdots \, w_m]^T$$

一対比較行列

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_m \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m/w_1 & w_m/w_2 & \cdots & w_m/w_m \end{bmatrix}$$

$$a_{ii} = 1, \ a_{ji} = 1/a_{ij}, \ a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$$

- まず，完全に整合的な判断をした場合の一対比較行列を考えます．
- m 個の要素の重要度を w_1 から w_m とします．
- 一対比較で，対角線を挟んで対称な位置にある成分は互いに逆数としていました．
- また，要素の重要度は幾何平均に基づいて計算されていました．

- このような計算法で，完全に整合的な一対比較を行った場合，一対比較行列はここに示すようになります．
- つまり，一対比較行列の (i,j) 成分は w_i 割る w_j となります．
- 当然のことながら，対角成分がすべて 1 となり，対角線を挟んで対称な位置にある成分は互いに逆数になっています．

- また，完全に整合的な一対比較を行った場合は，(i,j) 成分の値を a_{ij}，(j,k) 成分の値を a_{jk} とすると，(i,k) 成分の値は a_{ij} 掛ける a_{jk} となります．
- 先ほどお話しましたように，一対比較は差ではなく比として評価しているので，このような関係が成り立ちます．
-

判断の整合性の確認と修正

完全に整合的な評価

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{13} = a_{12}a_{23} = 2 \times 3 = 6$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/10 \\ 3/10 \\ 1/10 \end{bmatrix}$$

- 完全に整合的な評価の簡単な数値例を示しておきましょう．
- この一対比較行列では，(1,2) 成分が 2 で，(2,3) 成分が 3 で，(1,3) 成分は 6 ですから，(1,3) 成分の値は (1,2) 成分と (2,3) 成分の積になっています．
- ついでに，重要度も示しておきます．

判断の整合性の確認と修正

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_m \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m/w_1 & w_m/w_2 & \cdots & w_m/w_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} mw_1 \\ mw_2 \\ \vdots \\ mw_m \end{bmatrix} = m\boldsymbol{w}$$

m $\boldsymbol{A}$ の固有値
$\boldsymbol{w}$ $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル

- 再び一般論に戻ります.
- 完全に整合的な評価の一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ と，要素の重要度のベクトル $\boldsymbol{w}$ をかけてやります.
- 簡単な行列演算の結果，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{w}$ の積は $\boldsymbol{w}$ に m を掛けたものに等しくなることが分かります.
- さて，ここで既に線形代数を学習した人には気づいていただきたいのですが，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{w}$ が成り立つということは，m と $\boldsymbol{w}$ はそれぞれ，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルとなります.

- 一般に m 次の正方行列は最大 m 個の固有値を持ちますが，完全に整合的な評価の一対比較行列の場合，零でない固有値は 1 個だけ，すなわち m だけになります.
- この性質を利用して一対比較の整合性のチェックを行います.

判断の整合性の確認と修正

判断の整合性の指標

- $\boldsymbol{A}$: 実際の一対比較で得られた一対比較行列

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

を満たす λ (最大 m 個) のうち，最大のものを $\lambda_{\max}$
- 整合性の指標 (Consistency Index; C.I.)

$$\mathrm{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - m}{m - 1}$$

- C.I. が $0.1 \sim 0.15$ なら評価は十分整合的

- 実際の一対比較は必ずしも完全に整合的ではありません．
- 実際の一対比較から得られた一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は，零でない固有値の数が必ずしも 1 個とは限りません．
- その場合，最大の固有値に注目します．
- 最大固有値 $\lambda_{\max}$ は m と等しいか，m より大きいという性質があります．

- 完全に整合的な評価では，$\lambda_{\max}$ と m は等しいので，$\lambda_{\max}$ と m の差が小さいほど整合性が高い，逆に言えば，$\lambda_{\max}$ と m の差が大きいほど整合的でないということになります．
- 一対比較行列の次数 m が大きくなるほど，$\lambda_{\max}$ と m の差は大きくなりやすいので，$\lambda_{\max}$ と m の差を $m-1$ で割ったものを整合性の指標，C.I. とします．

- C.I. 値が 0.1 以下，場合によっては 0.15 以下なら，評価は十分整合的と判断します．
- それでは，アパートの選択における一対比較について C.I. の値を見てみましょう．

判断の整合性の確認と修正

C.I. の計算例

評価基準

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{\max} = 3.01$
C.I. < 0.01

代替案 (所要時間)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{\max} = 3.18$
C.I. $= 0.09$

- 評価基準の一対比較ですが，C.I. の値は 0.01 より小さく，整合性の目安の 0.1 よりずっと小さくなっていますので，十分整合的な評価であると言えます．
- $\lambda_{\max}$ が 3.01 で，行列の次数が 3 ですから非常に近い値になっています．
- 一対比較行列を見てみましょう．
- 対角線より上の成分に注目します．
- (1,2) 成分が 7，(2,3) 成分が 1/3，(1,3) 成分が 3 となっています．

- $7 \times (1/3)$ は約 2.3 ですので，例えば (1,3) 成分の評価が 2 であれば，数値上でもほぼ完璧ということになりますが，もちろん判断をし直す必要はありません．
- 次に，勤務先までの所要時間に関する代替案間の一対比較を見てみましょう．
- この一対比較に関して，C.I. の値は 0.09 で，整合性の目安である 0.1 を何とか下回っているので，一応整合的な評価として良いということになります．

- 一対比較行列を見てみましょう．
- 対角線より上の成分に注目します．
- (1,2) 成分が 5，(2,3) 成分が 5，(1,3) 成分が 7 となっています．
- 5×5 は 25 ですので，(1,2) 成分，(2,3) 成分の値に比べて，(1,3) 成分の値が小さいということになります．
- もちろん 25 という評価値はありませんので，例えば，(1,2) 成分が 3，(2,3) 成分が 3 で，(1,3) 成分が 7 とか 9 なら，もっと整合性の高い評価になりますが，このままでも一応整合性の目安はクリアしています．

判断の整合性の確認と修正

C.I. の計算例

代替案 (きれいさ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

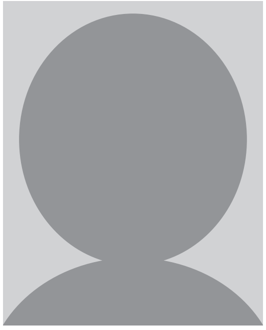
$\lambda_{\max} = 3.04$
C.I. $= 0.02$

代替案 (家賃)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/7 \\ 3 & 1 & 1/5 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{\max} = 3.06$
C.I. $= 0.03$

- 部屋のきれいさと家賃に関しても，C.I. の値は 0.02, 0.03 で，十分整合的な評価が行われています．
- これについては，後で確認しておいて下さい．
- さて，ここまでは整合的な評価ができた場合で，その場合は整合性が確認できれば，それで終わりです．
- 次は，整合的な評価ができていなかった場合の扱いです．
-



- 一対比較行列の C.I. の値が整合性の目安を超えていた場合，整合的でない評価を行っていたことになります.
- その場合，評価を修正する必要があります.
- 修正作業を円滑に行うには，不整合の原因になっている部分を素早く見つける必要があります.
- ここでは，不整合の原因になっている部分を発見するヒントになる方法を一つ紹介します.
- この方法は必ずしも正しい指摘する保証はありませんが，それなりに役に立つことも多いかと思います.

判断の整合性の確認と修正

不整合部分の発見

1. 一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ から重要度 w_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ を求める
2. 求めた重要度を用いて，$m_{ij} = w_i/w_j$ を成分とする行列 $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$ を作る
3. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{M}$ の成分を比較し，差異の大きな成分に注目して，一対比較をやり直す

- 方法自体は単純で，まず整合的でない一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ から重要度 $\boldsymbol{w}$ を求めます．
- それから，重要度を用いて，(i,j) 成分が w_j 分の w_i となる正方行列 $\boldsymbol{M}$ を作ります．
- 先ほど説明しましたように，仮に一対比較が完全に整合的であれば，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{A}$ は一致します．
- 一対比較が整合的でない場合，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{A}$ を比較し，差異の大きな成分が怪しいということで，差異の大きな成分に注目して，評価を見直すというものです．

判断の整合性の確認と修正

不整合部分の発見

一対比較行列 A				重要度	重要度から生成 M				差異 $[(a_{ij}-m_{ij})/a_{ij}]$			
1	1	1/5	1/2	0.13	1	0.56	0.59	0.30	0	0.44	**-1.94**	0.40
	1	2	1/2	0.23		1	1.05	0.54		0	0.48	-0.07
		1	1/3	0.22			1	0.51			0	-0.54
			1	0.43				1				0

C.I. = 0.21

- それでは，数値例です．表の左欄は，4 要素間で一対比較を行った結果得られた一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ です．
- 対角線より下の成分は対称な位置の成分の逆数と分かっているので表示していません．
- この一対比較行列の C.I. の値は 0.21 で，整合性の目安を大きく超えていますので，整合的でない評価であったということになります．
- そこで，今示した手順で不整合の原因を探ります．

- この一対比較行列から重要度を求めます．
- 表の一つ右隣に示すような値になります．
- この重要度から行列 $\boldsymbol{M}$ を作ります．
- 表の中央のようになります．
-

- 次に，行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{M}$ を比較します．
- 成分の差のままでは，元の評定値が大きいほど差が大きくなりますので，成分の差を元の評定値で割ったもので差異を見ることにしてみました．
- その結果，表の右欄に示すようになりました．
- これを見ますと，(1,3) 成分の差異が大きく，この成分が怪しそうです．

判断の整合性の確認と修正

不整合部分の発見

一対比較行列 A				重要度	重要度から生成 M				差異 $[(a_{ij}-m_{ij})/a_{ij}]$			
1	1	**1/5**	1/2	0.13	1	0.56	0.59	0.30	0	0.44	**-1.94**	0.40
	1	2	1/2	0.23		1	1.05	0.54		0	0.48	-0.07
		1	1/3	0.22			1	0.51			0	-0.54
			1	0.43				1				0

C.I. = 0.21

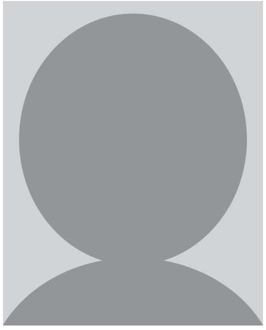
- (1,3) 成分が怪しいということで，一対比較行列 $\boldsymbol{A}$ の (1,3) 成分の周りを見てみましょう．
- (1,2) 成分が 1，(2,3) 成分が 2 ですから，これらが正しいとすると，(1,3) 成分は 2 くらいになることが期待されます．
- 仮に，(1,3) 成分を 2 と修正しますと…

判断の整合性の確認と修正

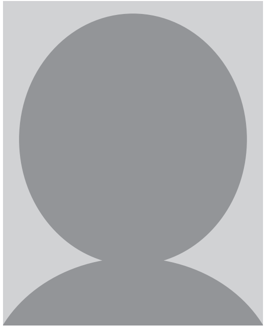
不整合部分の発見

一対比較行列 A				重要度	重要度から生成 M				修正結果			
1	1	**1/5**	1/2	0.13	1	0.56	**0.59**	0.30	1	1	**2**	1/2
	1	2	1/2	0.23		1	1.05	0.54		1	2	1/2
		1	1/3	0.22			1	0.51			1	1/3
			1	0.43				1				1
C.I. $= 0.21$									C.I. < 0.01			

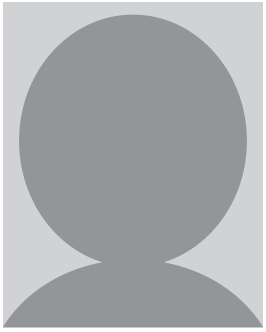
- C.I. 値は 0.01 より小さくなります．
- もちろん，今のは単なる数字合わせであり，実際には要素間の比較を行い，勘違いや入力ミスはなかったか等をチェックします．
- 一対比較法では，評価が不整合になることがあり，かえって面倒じゃないか，という印象を与えるかもしれませんが，必ずしもそうではありません．
-



- 例えば，各要素を 10 段階評定する場合，各要素に得点をつけたら，評価は完了したと思うかもしれませんが，実はおかしな評価をしている可能性があります．
- しかし，おかしな評価をしていても，それに気づかず，そのまま処理されてしまうということが多々あります．
- その点，一対比較法ではおかしな評価はおかしいと分かるので，むしろメリットと考えることもできます．



- また，ＡＨＰの数理的な手続きだけを見ると，ＡＨＰを用いた意思決定は直線的なプロセスという印象を与えるかもしれませんが，実際の意思決定はそうなるとは限りません．
- 「この問題の観点，すなわち評価基準はこれいいのか」,「自分はこの代替案についてどう感じているのか」といったことを，自らに問い直し，考えをまとめて行くことが，意思決定のプロセスであり，ＡＨＰはそのプロセスを支援する方法である，と捉えるべきかと，思います．
-


25 秒版

- （ポーズ）
- 以上，今回の講義では，階層分析法 AHP の基本的な手続きについて説明しました．
- AHP の威力を理解するには実際に分析を行ってみるのが一番です．
- AHP の計算を行うソフトウエアは，フリーウエアも含めてインターネット上でも公開されていますで，是非ソフトウエアを利用して，分析を行ってみて下さい．
- 今回はこれで終わります．