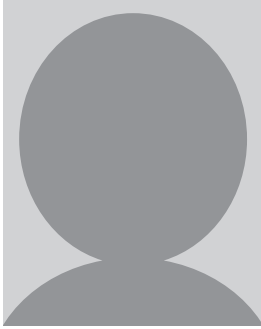


問題解決の数理（'17）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります。
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します。
- 「完全に無保証」です。



- 今回と次回の講義では，ゲーム理論についてお話しします.
- ゲーム理論と聞いて，皆さんは何を思い浮かべるでしょうか?
- コンピュータゲーム等のゲームを開発するための理論とか，ゲームの必勝法といったものを思い浮かべる方もいるかと思います.



- 一方，ゲーム理論に関する書籍は，専門書だけでなく，新書や所謂ビジネス本のような一般書も多く出版されています。
- また，ゲーム理論を構築してきた研究者には，数学や物理学等の業績だけでなく，驚異的な能力で様々な逸話を残しているフォン・ノイマン¹，今回の講義でも出てくるマクシミン戦略の提唱者でもあります。
-

¹ テロップ John von Neumann (1903 - 1957)

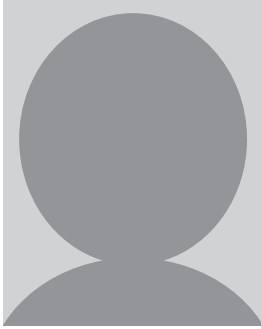


- また、今回、最も重要な概念であるナッシュ均衡解の提唱者であるナッシュ²は、その数奇な半生が「ビューティフルマインド」という本や映画にもなっているため、そういったことからゲーム理論を知っている方もいるかと思えます。

-

² テロップ John Forbes Nash, Jr. (1928 - 2015)

ゲームとは



- ゲーム理論とは、必ずしも利害の一致しない複数の主体が存在し、各主体の意思決定が他の主体の意思決定に影響を与える状況における、意思決定を分析する数理的な方法のことです。
- 主体が自らの利益を最大化するという意味での合理的な決定を問題とします。
- ゲーム理論が分析対象とする状況は、家事の分担、市場競争、予算の分配、訴訟、政策決定、条約締結など、個人間から国家間まであらゆる場面に存在します。



- また、ゲーム理論の応用は、いわゆる社会科学的分野に限らず、生物進化、通信ネットワーク、機械の制御などにも及びます。
- 今回と次回の講義では、ゲーム理論の基本的なモデルと解についてお話し
ます。
-

ゲームとは

ゲームの主な構成要素

プレイヤー ゲーム (意思決定) を行う主体

- 個人, 企業, 国家, …

戦略 行動の選択 (行動そのもの)

- じゃんけん…グー, チョキ, パー

利得 プレイヤーが戦略を選択した結果に対する各プレイヤーの評価値

- 主観的満足度, 利益, …

- 最初に, ゲームの構成要素の用語について説明します.
- ここでは, プレイヤー, 戦略, 利得について説明します.
- プレイヤーとは, ゲーム, すなわち意思決定を行う主体のことです.
- 例えば, 家事の分担であればプレイヤーは個人, 市場競争であればプレイヤーは企業, 条約の締結であればプレイヤーは国家です.
- 戦略とは, プレイヤーが行動決定の時点で, どの行動を選択するかあらかじめ定めた行動の計画のことですが, 行動自体を戦略と呼ぶこともあります.
- 例えば, じゃんけんであれば, グー, チョキ, パーのいずれを出すかが戦略です.
- 商品の価格競争であれば, 設定する価格が戦略です.
- 利得とは, 各プレイヤーが戦略を選択した結果に対する各プレイヤーの評価値のことです.
- 例えば, じゃんけんであれば, 勝ち +1, あいこは 0, 負けは -1 というように評価することができます.
- 企業間の競争であれば, 市場でのシェアや利益などが利得になります.
-

ゲームとは

プレイヤーの提携の有無

非協力ゲーム

プレイヤー個人が構成単位で、他のプレイヤーと提携することなく戦略を選択するゲーム

協力ゲーム

3人以上のプレイヤーがゲームを行う時に、プレイヤー同士で提携を行うゲーム

- ゲーム理論が扱うゲームは、幾つかの観点から分類されます。
- 代表的な分類の観点を示します。
- まず、プレイヤー間の提携の有無です。
- プレイヤー個人が構成単位で他のプレイヤーと提携することなく戦略を選択するゲームを非協力ゲームと呼びます。
- 一方、3人以上のプレイヤーがゲームを行う時に、プレイヤー同士で提携を行うゲームを協力ゲームと呼びます。
- 非協力ゲームにおいてプレイヤーが協調的に行動することも、協力ゲームにおいて競合が生じることもありますので、名称に惑わされないように注意して下さい。
- 非協力ゲームにおける協調については、次回の講義でお話します。
-

ゲームとは

行動のタイミング, 繰り返し

標準型ゲーム (戦略型ゲーム)

じゃんけんのように, ゲームを行うすべてのプレイヤーが同時に行動するゲーム

展開型ゲーム チェスのように, 各プレイヤーが順番に行動するゲーム

繰り返しゲーム 同じゲームを何度も繰り返すゲーム

- 次の観点は, 行動のタイミングや繰り返しです.
- じゃんけんのように, ゲームを行うすべてのプレイヤーが同時に行動するゲームを標準型ゲーム, または戦略型ゲームと呼びます.
- 一方, チェスのように, 各プレイヤーが順番に行動するゲームを展開型ゲームと呼びます.
- また, 同じゲームを何度も繰り返すゲームを繰り返しゲームと呼びます.

ゲームとは

プレイヤーに与えられる情報

完備情報ゲーム/不完備情報ゲーム 各プレイヤーの
利得をすべてのプレイヤーが知っているゲーム
/そうではないゲーム

完全情報ゲーム/不完全情報ゲーム 展開型ゲームに
おいて、各プレイヤーのこれまでの行動や状態の
履歴をプレイヤーがすべて知っているゲーム
/そうではないゲーム

- 次の観点は、プレイヤーに与えられる情報です。
- ゲームを行う各プレイヤーの利得をすべてのプレイヤーが知っているゲームを完備情報ゲームと呼び、そうでないゲームを不完備情報ゲームと呼びます。
- また、展開型ゲームにおいて、各プレイヤーのこれまでの行動や状態の履歴をプレイヤーがすべて知っているゲームを完全情報ゲーム、そうでないゲームを不完全情報ゲームと呼びます。
- 今回と次回の講義では、非協力ゲームのみを取り上げます。
- また、今回の講義では標準型ゲームのみを取り上げ、次回の講義では、展開型ゲームと繰り返しゲームも取り上げます。
- また、標準型ゲームにおいては完備情報ゲームのみを扱い、展開型ゲームでは完全情報ゲームのみを扱います。
-

ゲームとは

- A社とB社は、回線の品質向上ないしは回線使用料の値下げを検討
- 次期の利益増加見込み(単位は億円) … 利得行列
- 自社の利益増加を最大にするために各社がとるべき戦略は？

		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

- それでは、最初のゲームの例を見てみましょう。
- しばらくは次のようなストーリーを用います。
- 携帯電話の回線事業を行うA社とB社では、回線の品質向上ないしは回線使用料の値下げを検討しています。
- 各社が回線の品質向上、ないしは回線使用料の値下げを行った場合、次期の利益増加見込みを表に示します。
- この表のことを利得行列と呼びます。
- 各セルに2つの数値が入っていますが、第1成分がA社の利得、第2成分がB社の利得です。
- この問題では、利得は、次期の利益増加見込みで、単位は億円です。
- A社、B社の両社が品質向上を行った場合、利得はA社、B社とも20億円です。
- A社が品質向上、B社が料金値下げを行った場合、利得は、A社10億円、B社40億円です。
- A社が料金値下げ、B社が品質向上を行った場合、利得は、A社40億円、B社10億円です。
- A社、B社の両社が料金値下げを行った場合、利得はA社、B社とも30億円です。
- 以上の前提の下、自社の利得を最大にするために各社がとるべき戦略は何か…という問題です。

ゲームとは		
-------	--	--

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

A 社の立場から考える

- B 社が品質向上戦略を選択する時
 - × A 社 品質向上…20 億円利益増加
 - A 社 料金値下げ…40 億円利益増加

- まず, A 社の立場から考えてみます.
- B 社が品質向上を選択したと仮定します.
- A 社も品質向上を選択すると, A 社の利得は 20 億円です.
- A 社が料金値下げを選択すると, A 社の利得は 40 億円です.
- ですから, B 社が品質向上を選択したなら, A 社は料金値下げを選択したほうが利得が大きくなります.
- したがって, この場合, A 社は料金値下げを選択するべきです.
-

ゲームとは		
-------	--	--

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

A 社の立場から考える

- B 社が料金値下げ戦略を選択する時
 - × A 社 品質向上…10 億円利益増加
 - A 社 料金値下げ…30 億円利益増加

- 今度は、B 社が料金値下げを選択したと仮定します。
- A 社が品質向上を選択すると、A 社の利得は 10 億円です。
- A 社も料金値下げを選択すると、A 社の利得は 30 億円です。
- ですから、B 社が料金値下げを選択したなら、A 社は料金値下げを選択したほうが利得が大きくなります。
- したがって、この場合、A 社は料金値下げを選択するべきです。
-

ゲームとは

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

- B 社の戦略に関わらず，A 社は料金値下げ戦略を選択すべき … 支配戦略

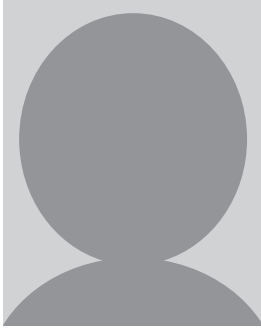
- 結局，B 社の戦略に関わらず，A 社は料金値下げ戦略を選択すべきである…
ということになります。
- このように他のプレイヤーの戦略に関わらず，自分の戦略で他の戦略に対して絶対的に優位な戦略を，支配戦略といいます。
- すなわち，A 社にとって，料金値下げは支配戦略となります。

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(20, 20)	(10, 40)
	料金値下げ	(40, 10)	(30, 30)

- B 社の戦略に関わらず，A 社は料金値下げ戦略を選択すべき … 支配戦略
- A 社の戦略に関わらず，B 社は料金値下げ戦略を選択すべき … 支配戦略
- 両社とも料金値下げを選択すべき … ゲームの解

- 次に，B 社の立場から考えるのですが，先ほどと同様ですので，結果だけお知らせしますと，A 社の戦略に関わらず，B 社は料金値下げ戦略を選択すべき…となります。
- これについては，後で確認しておいて下さい。
- 結局，両者とも相手の戦略に関わらず，料金値下げを選択すべきということになり，これがこのゲームの解となります。
- さて，このゲームは，相手の戦略に関わらず，自分の利得を最大にする戦略が決まったのですが，すべてのゲームに支配戦略が存在する訳ではありません。
- そもそも，すべてのゲームに支配戦略が存在するのなら，ゲーム理論なんて必要がなかったのかもしれない。

ナッシュ均衡解



- ここでは，ゲーム理論における最も基本的な解の概念であるナッシュ均衡解について説明します。
- 今回の講義の中で最も重要な部分ですので，そのつもりで聞いて下さい。
- それでは，さっそく例を見てみましょう。

ナッシュ均衡解

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

A 社の立場から考える

- B 社が品質向上戦略を選択する時
 - × A 社 品質向上…40 億円利益増加
 - A 社 料金値下げ…50 億円利益増加

- 先ほどと同じストーリーですが，利得行列の数値が変わっています。
- 先ほどと同様，まず，A 社の立場から考えます。
- B 社が品質向上を選択すると仮定します。
- A 社も品質向上を選択すると，A 社の利得は 40 億円となります。
- A 社が料金値下げを選択すると，A 社の利得は 50 億円となります。
- したがって，B 社が品質向上を選択するばあい，A 社は料金値下げを選択すべきです。

ナッシュ均衡解		
---------	--	--

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

A 社の立場から考える

- B 社が料金値下げ戦略を選択する時
 - A 社 品質向上…30 億円利益増加
 - × A 社 料金値下げ…20 億円利益増加

- 今度は，B 社が料金値下げを選択すると仮定します。
- A 社が品質向上を選択すると，A 社の利得は 30 億円となります。
- A 社も料金値下げを選択すると，A 社の利得は 20 億円となります。
- したがって，B 社が料金値下げを選択する場合，A 社は品質向上を選択すべきです。
-

ナッシュ均衡解

A社の立場から考える

- B社が品質向上戦略を選択する時
 - A社 料金値下げ…50億円利益増加
- B社が料金値下げ戦略を選択する時
 - A社 品質向上…30億円利益増加
- A社の支配戦略なし

- A社の選択をまとめますと、
- B社が品質向上を選択する時は、A社は料金値下げを選択するべきです。
- 一方、B社が料金値下げを選択する時は、A社は品質向上を選択するべきです。
- つまり、A社には支配戦略が存在せず、A社の最良の選択はB社の選択に依存します。

ナッシュ均衡解

B社の立場から考える

- A社が品質向上戦略を選択する時
 - B社 料金値下げ…50億円利益増加
- A社が料金値下げ戦略を選択する時
 - B社 品質向上…35億円利益増加
- B社の支配戦略なし

- B社についても簡単に見てみましょう。
- A社が品質向上を選択すると仮定します。
- B社は料金値下げを選択すると利得は50億円で、品質向上を選択すると利得は45億円で、この場合、B社は料金値下げを選択すべきです。
- 今度は、A社が料金値下げを選択する仮定します。
- B社は品質向上を選択すると利得は35億円で、料金値下げを選択すると利得は25億円で、この場合、B社は品質向上を選択すべきです。
- したがって、B社にも支配戦略は存在しません。
- それでは、支配戦略がないときには、各社はどの戦略を選択すべきでしょうか？
- 言い換えると、支配戦略がないゲームはどのような解を考えればいいのでしょうか？
-

ナッシュ均衡解

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
… 相手の戦略に対する最適反応戦略
- 各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解
- (品質向上 (40), 品質向上 (45))
→ (品質向上 (30), 料金値下げ (50))
… (品質向上, 品質向上) はナッシュ均衡解ではない

- このような状況でも有効な考え方が、最適反応戦略とナッシュ均衡解です。
- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略を、相手の戦略に対する最適反応戦略と呼びます。
- ここまで考えてきたような「A社が品質向上を選択するとした時、B社が自社の利得を最大にするために選択すべき戦略」が、まさに最適反応戦略のことです。
- そして、各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応となる、戦略の組み合わせをナッシュ均衡解と呼びます。
- 別のいい方をすると、「自分がその戦略から他の戦略に変更しても、利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」がナッシュ均衡解です。
- 例を用いて考えてみましょう。
- A社、B社とも品質向上を選択しているとします。
- その場合、利得はA社40億円、B社45億円ですが、この時B社が料金値下げに戦略を変更しますと、B社の利得は50億円になり、利得が増加します。
- つまり、A社が品質向上を選択している時、B社にとっての最適反応戦略は料金値下げです。
- これは、両社が品質向上という戦略の組み合わせは、B社にとって最適反応戦略でない、すなわち、ナッシュ均衡解ではないということを意味します。

ナッシュ均衡解

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
… 相手の戦略に対する最適反応戦略
- 各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解
- (品質向上 (40), 品質向上 (45))
→ (料金値下げ (50), 品質向上 (35))
… (品質向上, 品質向上) はナッシュ均衡解ではない

- 今と同様に、A社、B社とも品質向上を選択しているとします。
- その場合、利得はA社40億円、B社45億円ですが、今度はA社が料金値下げに戦略を変更しますと、A社の利得は50億円になり、利得が増加します。
- つまり、B社が品質向上を選択している時、A社にとっての最適反応戦略は料金値下げです。
- 両社が品質向上という戦略の組み合わせは、A社にとっても最適反応戦略でない、すなわち、ナッシュ均衡解ではない…ということになります。

ナッシュ均衡解

- 各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解
- (品質向上 (30), 料金値下げ (50))
→ (品質向上 (40), 品質向上 (45))
- (品質向上 (30), 料金値下げ (50))
→ (料金値下げ (20), 料金値下げ (25))
- (品質向上, 料金値下げ) はナッシュ均衡解

- 今度は、A社が品質向上、B社が料金値下げを選択している場合を考えてみましょう。
- この時、A社の利得は30億円、B社の利得は50億円です。
- ここで、B社が料金値下げから品質向上に戦略を変更したとしましょう。
- すると、B社の利得は45億円に減ってしまいますので、B社はこのような戦略の変更はしません。
- 今度はA社について考えてみましょう。
- A社が品質向上、B社が料金値下げを選択している場合、A社の利得は30億円で、B社の利得に比べて小さいので、是非なんとかしたいところです。
- A社が品質向上から料金値下げに戦略を変更したとしましょう。
- すると、A社の利得はさらに減って、20億円となってしまいますので、A社はこのような戦略の変更はしません。
- 結局、A社が品質向上、B社が料金値下げを選択している場合、A社もB社も自分が戦略を変更するだけでは、利得を増やすことができません。
- つまり、「A社が品質向上、B社が料金値下げ」は、「自分がその戦略から他の戦略に変更しても、利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」、「相手の戦略に対する最適反応戦略の組み合わせ」になっています。
- すなわち、「A社が品質向上、B社が料金値下げ」はこのゲームにおけるナッシュ均衡解になっています。

ナッシュ均衡解

- 各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解
- (料金値下げ (50), 品質向上 (35))
→ (料金値下げ (20), 料金値下げ (25))
- (料金値下げ (50), 品質向上 (35))
→ (品質向上 (40), 品質向上 (45))
- (料金値下げ, 品質向上) はナッシュ均衡解

- ナッシュ均衡解は最も重要な概念なので、このゲームについて、さらに検討しましょう。
- 今度は、A社が料金値下げ、B社が品質向上を選択している場合を考えてみましょう。
- この時、A社の利得は50億円、B社の利得は35億円です。
- ここで、B社が品質向上から料金値下げに戦略を変更したとしましょう。
- すると、B社の利得は25億円で減ってしまいますので、B社はこのような戦略の変更はしません。
- A社より利得が大きくなるから、A社を潰しにかかるために、敢えて料金値下げを行うという状況もあり得るかもしれませんが、このゲームは飽くまで自社の次期利益増加が利得でありますので、B社は自らの利得を減らすような戦略の変更は行いません。
-
- 次はA社について考えてみましょう。
- A社が料金値下げ、B社が品質向上を選択している場合、A社の利得は50億円、B社の利得は35億円です。
- A社が料金値下げから品質向上に戦略を変更したとしましょう。
- すると、A社の利得は40億円で減少してしまいますので、A社はこのような戦略の変更はしません。
- 結局、A社が料金値下げ、B社が品質向上を選択している場合も、A社もB社も自分が戦略を変更するだけでは、利得を増やすことができません。

- つまり、「A社が料金値下げ, B社が品質向上」は、「自分がその戦略から他の戦略に変更しても, 利得を大きくできないような戦略の組み合わせ」, つまり「相手の戦略に対する最適反応戦略の組み合わせ」になっています.
- すなわち、「A社が料金値下げ, B社が品質向上」もこのゲームにおけるナッシュ均衡解になっています.

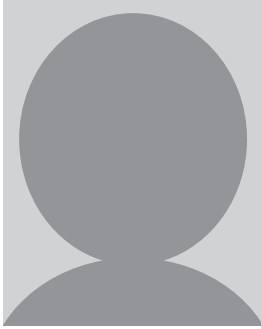
		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

- (品質向上 (30), 料金値下げ (50))
- (料金値下げ (50), 品質向上 (35))
- ナッシュ均衡解は複数存在することもある

- この例のように、ナッシュ均衡解は複数存在することがあります。
- B 社は、A 社が品質向上、B 社が料金値下げで、B 社の利得がの 50 億円になることを望みます。
- 一方、A 社は、A 社が料金値下げ、B 社が品質向上で、A 社の利得が 50 億円になることを望みます。
- 両社とも、自社が料金値下げ、他社が品質向上となって欲しいのですが、両社の希望は両立しません。
- この場合、一方が先に料金値下げを発表すれば、他方は品質向上を選択せざるを得ないので、現実には先手必勝となります。
- もちろん、料金値下げの発表が同時の場合、両社にとって最悪の結果になってしまいます。
- ナッシュ均衡解は、支配戦略がない場合でも、どの戦略をとるべきかを示してくれます。
- ただし、今の例のように、ナッシュ均衡解が複数ある場合は、難しい問題が残ることもあります。
-



混合戦略



- ナッシュ均衡解は支配戦略がない場合でも，取るべき戦略を示してくれましたが，先ほどのやり方ではナッシュ均衡解を見つけることができないゲームもあります。
- 次のゲームを見てみましょう。
-

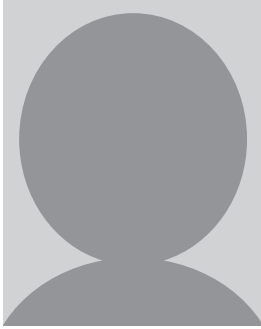
		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

- また利得行列を変更して，このような利得行列を持つゲームを考えます．
- このゲームにおけるナッシュ均衡解を探してみましょう．

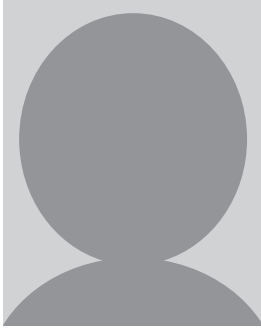
		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

(品質向上, 料金値下げ) $\xrightarrow{B \text{ 変更}}$ (品質向上, 品質向上) $\xrightarrow{A \text{ 変更}}$
 (料金値下げ, 品質向上) $\xrightarrow{B \text{ 変更}}$ (料金値下げ, 料金値下げ)
 $\xrightarrow{A \text{ 変更}}$ (品質向上, 料金値下げ) $\xrightarrow{B \text{ 変更}}$...

- まず, A 社が品質向上, B 社が料金値下げを選択した状態を考えます.
- この状態で, A 社の利得は 40 億円, B 社の利得は 20 億円です.
- ここで, B 社が料金値下げから品質向上に戦略を変更しますと, B 社の利得は 35 億円に増加しますので, B 社にとって, 品質向上に変更するのが最適反応戦略になります.
- そうしますと, 両者品質向上という状態になります.
- すると, A 社は品質向上から料金値下げに戦略を変更することにより, 利得を 25 億円から 30 億円に増加することができますので, A 社は料金値下げに戦略を変更します.
- すると, 今度は B 社が料金値下げに戦略を変更し, さらに A 社が品質向上に戦略を変更して, 最初の「A 社が品質向上, B 社が料金値下げ」に戻ってしまいます.
- つまり, このゲームでは, 最適反応による戦略変更が果てしなく続き均衡せず, ナッシュ均衡解が見つかりません.
- このゲームが例外的におかしなゲームかということ, そういう訳ではありません.



- 例えば、じゃんけんは、相手がグーなら自分はパー、自分がパーなら相手はチョキというように、最適反応が無限に続きます。
- それでは、このようなゲームについて、どのように考えればいいのでしょうか？
- 最適反応が無限に続くゲームの例として、じゃんけんを挙げましたが、じゃんけんでは、グー、チョキ、パーを不規則な順序で出しています。



- つまり，じゃんけんでは，毎回同じ手を出すのではなく，グー，チョキ，パーの中から確率的に手を出しています。
- じゃんけんのように，確率的に戦略を選択しようというのが，最適反応が無限に続くゲームへのアプローチです。
-

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

- ナッシュ均衡解がない
→ 確率的な戦略の選択 (混合戦略) を導入
- A 社が確率 p で品質向上, $1 - p$ で料金値下げを選択
- B 社が確率 q で品質向上, $1 - q$ で料金値下げを選択

- このような確率的な戦略の選択を混合戦略といいます.
- これまでのように, 一つの戦略の選択は純粋戦略といいます.
- それでは, このゲームの混合戦略について考えましょう.
- A 社が確率 p で品質向上を選択し, $1 - p$ で料金値下げを選択するとします.
- 一方, B 社は確率 q で品質向上を選択し, $1 - q$ で料金値下げを選択するとします.
-

		混合戦略	
		B 社	
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

• A 社の期待利得 u_A

$$u_A = 25pq + 40p(1 - q) + 30(1 - p)q + 20(1 - p)(1 - q)$$

$$= (-25q + 20)p + 10q + 20$$

- A 社も B 社も品質向上を選択する確率は pq となります。
- この場合、A 社の利得は 25 億円となります。
- A 社が品質向上、B 社が料金値下げを選択する確率は $p \times (1 - q)$ となります。
- この場合、A 社の利得は 40 億円となります。
- A 社が料金値下げ、B 社が品質向上を選択する確率は $(1 - p) \times q$ となります。
- この場合、A 社の利得は 30 億円となります。
- A 社も B 社も料金値下げを選択する確率は $(1 - p) \times (1 - q)$ となります。
- この場合、A 社の利得は 20 億円となります。
- そうしますと、A 社の利得の期待値、これを期待利得と呼びますが、A 社の期待利得 u_A は、この式のようになります。
- この式を整理すると、 u_A は、このようになります。
-

混合戦略	
------	--

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

- B 社の期待利得 u_B

$$\begin{aligned}
 u_B &= 35pq + 20p(1 - q) + 20(1 - p)q + 40(1 - p)(1 - q) \\
 &= (35p - 20)q - 20p + 40
 \end{aligned}$$

- 今度は, B 社の期待利得 u_B を求めます.
- 同様の計算で, このような式が得られます.

混合戦略	
------	--

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(25, 35)	(40, 20)
	料金値下げ	(30, 20)	(20, 40)

- A 社の期待利得 u_A

$$u_A = (-25q + 20)p + 10q + 20$$

- B 社の期待利得 u_B

$$u_B = (35p - 20)q - 20p + 40$$

- これで、A 社と B 社の期待利得 u_A と u_B を求めることができました。
- 括弧によるくくり方や、正負の符号等を比較してみてください。
- それでは、A 社の立場で、期待利得 u_A について考えてみましょう。

混合戦略

$$u_A = (-25q + 20)p + 10q + 20$$

- $-25q + 20 > 0$ ($q < 4/5$) であれば, p が大きいほど u_A は大きくなるので, A社は $p = 1$ とする
- $q > 4/5$ であれば, p が大きいほど u_A は小さくなるので, A社は $p = 0$ とする
- $q = 4/5$ であれば, p に関わらず, $u_A = 28$

- A社が操作できるのは p だけです.
- まず, $-25q + 20$ が零より大きい時, すなわち q 小なり $4/5$ の時は, p が大きいほど u_A は大きくなりますので, p を最大値である 1 とすれば, u_A が最大になります.
- 一方, $-25q + 20$ が零より小さい時, すなわち q 大なり $4/5$ の時は, p が大きいほど u_A は小さくなりますので, p を最小値である 0 とすれば, u_A が最大になります.
- 大雑把に言えば, B社が料金値下げをしてくる確率が高い時には, A社は品質向上を選択するべきで, B社が品質向上をしてくる確率が高い時には, A社は料金値下げを選択するべきであるということです.
- それでは, $-25q + 20 = 0$ の時, すなわち $q = 4/5$ の時, A社はどうすべきかということですが, $q = 4/5$ の時は, p の値に関係なく, $u_A = 28$ となります.

混合戦略

$$\begin{aligned}
 u_B &= 35pq + 20p(1 - q) + 20(1 - p)q + 40(1 - p)(1 - q) \\
 &= (35p - 20)q - 20p + 40
 \end{aligned}$$

- $35p - 20 > 0$ ($p > 4/7$) であれば, q が大きいほど u_B は大きくなるので, B社は $q = 1$ とする
- $p < 4/7$ であれば, q が大きいほど u_B は小さくなるので, B社は $q = 0$ とする
- $p = 4/7$ であれば, q に関わらず, $u_B \simeq 28.6$

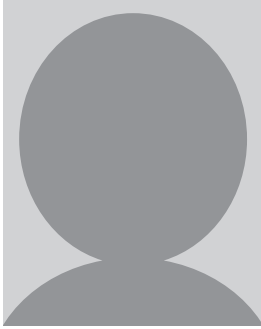
- 今度は, B社の立場で, 期待利得 u_B について考えてみましょう.
- B社が操作できるのは q だけです.
- まず, $35p - 20$ が零より大きい時, すなわち p 大なり $4/7$ の時は, q が大きいほど u_B は大きくなりますので, q を最大値である 1 とすれば, u_B が最大になります.
- 一方, $35p - 20$ が零より小さい時, すなわち p 小なり $4/7$ の時は, q が大きいほど u_B は小さくなりますので, q を最小値である 0 とすれば, u_B が最大になります.
- そして, $35p - 20 = 0$ の時, すなわち $p = 4/7$ の時は, q の値に関係なく, $u_B = 28.6$ となります.

混合戦略

- $q < 4/5 \rightarrow p = 1(> 4/7) \rightarrow q = 1(> 4/5)$
 $\rightarrow p = 0(< 4/7) \rightarrow q = 0(< 4/5) \rightarrow p = 1(> 4/7) \rightarrow \dots$
- $p = 4/7, q = 4/5$ の時のみ
 互いの最適反応戦略が均衡する
 \rightarrow 混合戦略におけるナッシュ均衡解
- 混合戦略まで含めればナッシュ均衡解は必ず存在

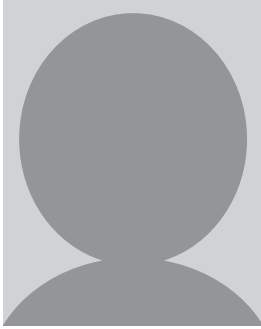
- ここまで、A社、B社の個々の選択を見てきましたが、今度はA社とB社を合わせて考えましょう。
- まず、B社は品質向上をとる確率 q が $4/5$ より小さかったとします。
- すると、A社は p を 1 とします。
- すると、 p は $4/7$ より大きくなりますから、B社は q を 1 とします。
- すると、 q は $4/5$ より大きくなりますから、A社は p を 0 とします。
- すると、 p は $4/7$ より小さくなりますから、B社は q を 0 とします。
- そうしますと、 q は $4/5$ より小さくなりますから、A社は p を 1 とし、またしても循環が生じてしまいます。
-
- $p = 4/7, q = 4/5$ の時は、A社は p をいかに変化させても、利得は変わらず、増加しないので、A社は $p = 4/7$ のままにします。
- B社も q をいかに変化させても、利得は変わらず、増加しないので、B社は $q = 4/5$ のままにします。
- つまり、 $p = 4/7, q = 4/5$ の時のみ互いの最適反応戦略が均衡しま
- そこで、A社は $p = 4/7$ の確率で品質向上、 $1 - p = 3/7$ の確率で料金値下げを選択し、
- B社は $q = 4/5$ の確率で品質向上、 $1 - q = 1/5$ の確率で料金値下げを選択するのが、このゲームにおけるナッシュ均衡解となります。

- ここでは一例を示したのみですが、混合戦略まで含めれば、プレイヤーが何人のゲームでも、また戦略がいくつあっても、ナッシュ均衡解が必ず存在することが示されています。
-



- 以上，混合戦略について説明しました。
- 期待利得の計算や少々複雑な場合分けがあり，難しく感じたかもしれません。
- これらは，落ち着いて考えれば理解できると思いますので，復習しておいて下さい。
- それでも分からない場合は，純粋戦略ではナッシュ均衡解が得られない場合があること，そして，混合戦略まで含めれば，ナッシュ均衡解が必ず存在するというだけでも覚えておいて下さい。
-

マクシミン戦略



- 今度は，最適反応戦略とは異なる考え方である，マクシミン戦略についてお話しします。

マクシミン戦略			
		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

- 自分の利得を相手が最小化するものとして、想定される最小の利得が最大になる戦略
… マクシミン (maxmin) 戦略
- リスクを最小にする戦略

- マクシミン戦略とは、自分の戦略に対して、相手は自分の利得が最小となる戦略を選択するものとして、想定される最小の利得が最大になる戦略です。
- マクシミン戦略はリスクを最小にする戦略と解釈できます。
- それでは、このゲームに関して、マクシミン戦略を考えてみましょう。

マクシミン戦略			
		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

A 社

○ 品質向上 … $\min(40, 30) = 30$

× 料金値下げ … $\min(50, 20) = 20$

- 例によって、A 社の立場から考えます。
- A 社が品質向上を選択したとします。
- B 社が品質向上を選択した場合、A 社の利得は 40 億円、B 社が料金値下げを選択した場合、A 社の利得は 30 億円となります。
- マクシミン戦略では、B 社は A 社の利得が最小となる戦略を選択するものとし、B 社は料金値下げを選択し、A 社の利得は 30 億円になると考えます。
- 今度は、A 社が料金値下げを選択したとします。
- B 社が品質向上を選択した場合、A 社の利得は 50 億円、B 社が料金値下げを選択した場合、A 社の利得は 20 億円となります。
- B 社は A 社の利得が最小となる戦略を選択するものとし、B 社は料金値下げを選択し、A 社の利得は 20 億円になると考えます。
- A 社が品質向上を選択した場合、A 社の最小の利得は 30 億円、A 社が料金値下げを選択した場合、A 社の最小の利得は 20 億円となりますから、マクシミン戦略に従いますと、最小の利得が最大になる、すなわち最小の利得が 30 億円となる、品質向上を A 社は選択します。

マクシミン戦略			
		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

B社

○ 品質向上 … $\min(45, 35) = 35$

× 料金値下げ … $\min(50, 25) = 25$

- 今度は，B社の立場から考えます。
- B社が品質向上を選択したとします。
- A社が品質向上を選択した場合，B社の利得は45億円，A社が料金値下げを選択した場合，B社の利得は35億円となります。
- 今度は，B社が料金値下げを選択したとします。
- A社が品質向上を選択した場合，B社の利得は50億円，A社が料金値下げを選択した場合，B社の利得は25億円となります。
- B社が品質向上を選択した場合，B社の最小の利得は35億円，B社が料金値下げを選択した場合，B社の最小の利得は25億円となりますから，マクシミン戦略に従いますと，最小の利得が最大になる，すなわち最小の利得が35億円となる，品質向上をB社は選択します。
- 以上により，マクシミン戦略に従いますと，A社，B社とも品質向上を選択するのがこのゲームの解になります。
- そして，A社は40億円，B社は45億円という利得になります。
- A社は最小の利得が30億円になる品質向上を選択し，B社は最小の利得が35億円となる品質向上を選択したのですが，その結果，両社が想定した最悪の事態にはならず，両社とも最小ではない利得を得るという結果になりました。

		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

● 一般には、マクシミン戦略に基づく解とナッシュ均衡解は一致しない

マクシミン解 (品質向上 (40), 品質向上 (45))

ナッシュ均衡解 (品質向上 (30), 料金値下げ (50)) と (料金値下げ (50), 品質向上 (35))

- 一般には、マクシミン戦略により得られる解、マクシミン解と、ナッシュ均衡解は一致しません。
- このゲームにおいて、マクシミン解は、両者とも品質向上でした。
- このゲームにおいて、ナッシュ均衡解は、A 社が品質向上で B 社が料金値下げ、それから A 社が料金値下げで B 社が品質向上の 2 つで、どちらの解もマクシミン解とは一致しません。
- このゲームでは、B 社がマクシミン戦略を取ることが分かっていたら、B 社は品質向上を選択しますので、A 社は料金値下げを選択すれば、マクシミン解よりも大きな利得を得ることができます。
-

マクシミン戦略

2人定和ゲーム

- 自分と相手の利得の和が一定のゲーム
…2人定和ゲーム
- 自分と相手の利得の和が常に0となるゲーム
…2人ゼロ和ゲーム
- じゃんけんは勝ち、あいこ、負けの利得を
各々1, 0, -1とおけば2人ゼロ和ゲーム

- マクシミン解とナッシュ均衡解が一致するゲームとして、2人定和ゲームがあります。
- 2人定和ゲームとは、自分と相手の利得の和が一定となるゲームです。
- 特に、自分と相手の利得の和が零となるゲームは、2人ゼロ和ゲームと呼ばれます。
- 2人で行うじゃんけんは、勝ち、あいこ、負けの利得を各々、1, 0, -1とおけば、2人ゼロ和ゲームとなります。
- ゼロ和ゲームは英語の名称であるゼロサムゲームと呼ばれることもよくあります。

マクシミン戦略

2人定和ゲーム

- 2人定和ゲームと2人ゼロ和ゲームは利得の原点が異なるだけで数学的には同等
- 2人定和ゲームにおいては，マクシミン戦略に基づく解とナッシュ均衡解は一致する

- 2人定和ゲームと2人ゼロ和ゲームは，利得の原点が異なるだけで，数学的には同等です。
- そのため，2人の利得の和が零でない一定値となる2人定和ゲームのこともゼロサムゲームと呼んでいることがよくあります。
- 先に言いましたように，2人定和ゲームにおいては，マクシミン解とナッシュ均衡解は一致します。
- これを次のゲームで確認しましょう。

マクシミン戦略		
2人定和ゲーム		
		B社
		品質向上 料金値下げ
A社	品質向上	(60, 40)
	料金値下げ	(55, 45)

- 2人定和ゲームにおいては、マクシミン戦略に基づく解とナッシュ均衡解は一致する

マクシミン解 (料金値下げ (50), 料金値下げ (50))

ナッシュ均衡解 (料金値下げ (50), 料金値下げ (50))

- このゲームは、A社とB社の利得の和が常に100億円となっていますので、2人定和ゲームです。
- まず、マクシミン戦略について考えます。
- A社が品質向上を選択すると、利得は60億円ないしは45億円ですので、最小の利得は45億円です。
- A社が料金値下げを選択すると、利得は55億円ないしは50億円ですので、最小の利得は50億円です。
- したがって、A社は最小で50億円の利得が得られる料金値下げを選択します。
- B社も同様に料金値下げを選択します。
- 次に、両社が料金値下げを選択するマクシミン解がナッシュ均衡解になっているか確かめます。
- A社が料金値下げから品質向上に戦略を変更すると、利得は50億円から45億円に減少しますので、A社は戦略を変更しません。
- 次に、B社が料金値下げから品質向上に戦略を変更すると、やはり利得は50億円から45億円に減少しますので、B社も戦略を変更しません。
- したがって、両社が料金値下げを選択するのは、ナッシュ均衡解でもあります。
- 他の戦略の組み合わせは、ナッシュ均衡解になっていません。
- これは各自で確かめておいて下さい。



35秒版

- (ポーズ)
- 先ほど、混合戦略についてお話しましたが、マクシミン戦略にも混合戦略があります。
- 先ほどと同様に、戦略を確率的に選択すると、戦略を選択する確率に応じて利得の期待値が決まります。
- 相手はこちらの期待利得が最小になるような戦略を選択しますので、こちらは利得の最小値が最大になるように戦略を選択する確率を設定します。
- この詳細は次回にお話します
- 今回はこれで終わりにします。

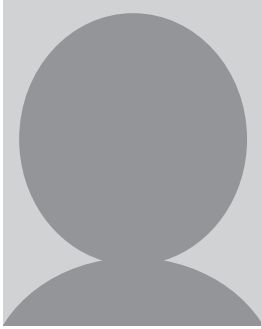


1分版

- 今回の講義では，一つのカバーストーリーで，各ゲームの数理的な特徴を示してきました．
- その分，ゲーム理論の様々な現象への適用についてはお話できませんでした．
- 印刷教材の演習問題には，異なるカバーストーリーのゲームが載せてありますので，是非回答と合わせてご覧いただきたいと思います．



- これらのゲームは，さらにカバーストーリーを変えると，必要なコストを負担せず利益だけを受ける所謂フリーライダー，環境問題や国際紛争といった問題のモデルにもなりますので，興味のある方は調べてみて下さい。
- (ポーズ)



- 次回の講義では，繰り返しのあるゲームなど，今回とは趣の異なるゲームについてお話します．
- 趣は異なりますが，今回お話した内容がその基礎になりますので，今回の内容について，復習しておいて下さい．
- 今回はこれで終わりにします．