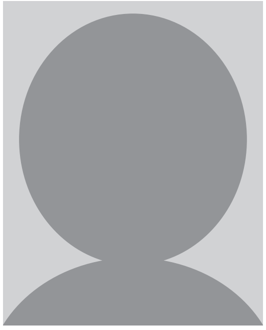
問題解決の数理（’１７）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.



- 今回は，前回に引き続きゲーム理論についてお話します.
- 今回は盛り沢山ですので，さっそく本題に入ります.
- まずは，ナッシュ均衡解とマクシミン戦略について復習します.

前回の復習

		プレイヤーB	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤーA	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
  … 相手の戦略に対する**最適反応戦略**
- 各プレイヤーのとる戦略が互いに相手の戦略に
  対する最適反応戦略 … **ナッシュ均衡解**

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略を相手の戦略に対する最適反応戦略と呼びます.
- 各プレイヤーのとる戦略が，互いに相手の戦略に対する最適反応戦略となる，戦略の組み合わせを，ナッシュ均衡解と呼びます.

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略 … 相手の戦略に対する**最適反応戦略**
- 各プレイヤーのとる戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … **ナッシュ均衡解**

- 両者が戦略 1 を選択していたとします.
- この時，プレイヤー A の利得は 40，プレイヤー B の利得は 45 です.
- プレイヤー A が戦略を戦略 2 に変更すると，利得は 50 になり，利得は増加します.
- すなわち，プレイヤー B が戦略 1 を選択している時の，プレイヤー A の最適反応戦略は戦略 2 です.
- 両者が戦略 1 を選択している時，プレイヤー B が戦略を戦略 2 に変更すると，利得は 50 になり，利得は増加します.
- すなわち，プレイヤー A が戦略 1 を選択している時の，プレイヤー B の最適反応戦略は戦略 2 です.
- 以上から，両者が戦略 1 の組み合わせは最適反応戦略の組み合わせになっていないので，ナッシュ均衡解ではありません.

前回の復習

		プレイヤーB	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤーA	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略 … 相手の戦略に対する**最適反応戦略**
- 各プレイヤーのとる戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … **ナッシュ均衡解**

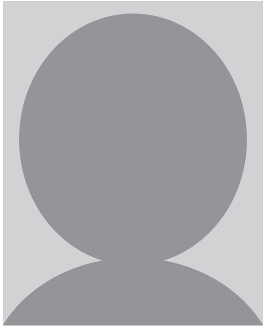
- 今度は，プレイヤーAが戦略2，プレイヤーBが戦略1を選択していたとします．
- この時，プレイヤーAの利得は50，プレイヤーBの利得は35です．
- プレイヤーAが戦略を戦略1に変更すると，利得は40になり，利得は減少します．
- すなわち，プレイヤーBが戦略1を選択している時の，プレイヤーAの最適反応戦略は戦略2です．
- プレイヤーBが戦略を戦略2に変更すると，利得は25になり，利得は減少します．
- すなわち，プレイヤーAが戦略2を選択している時の，プレイヤーBの最適反応戦略は戦略1です．
- 以上から，プレイヤーAが戦略2，プレイヤーBが戦略1の組み合わせは，互いに相手の戦略に対する最適反応戦略になっています．
- すなわち，この戦略の組み合わせはナッシュ均衡解になっています．
- 次に，マクシミン戦略について復習します．

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(60, 40)	(45, 55)
	戦略 2	(55, 45)	**(50, 50)**

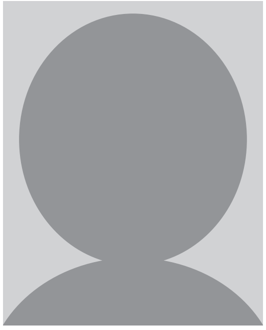
- 自分の利得を相手が最小化するものとして，想定される最小の利得が最大になる戦略 … マクシミン (maxmin) 戦略
- 2 人定和ゲームにおいては，マクシミン戦略に基づく解とナッシュ均衡解は一致

- マクシミン戦略とは，自分の戦略に対して，相手は自分の利得が最小となる戦略を選択するものとして，想定される最小の利得を最大とする戦略です．
- マクシミン戦略はリスクを最小にする戦略と解釈できます．
- 2 人定和ゲームとは，自分と相手の利得の和が一定となるゲームです．
- 特に，自分と相手の利得の和が零となるゲームは，2 人ゼロ和ゲーム，ゼロサムゲームと呼ばれます．
- 2 人定和ゲームにおいては，マクシミン解とナッシュ均衡解が一致します．
- このゲームは，プレイヤー A とプレイヤー B の利得の和が常に 100 となっていますので，2 人定和ゲームです．
- プレイヤー A が戦略 1 を選択すると，利得は 60 ないしは 45 ですので，最小の利得は 45 です．
- プレイヤー A が戦略 2 を選択すると，利得は 55 ないしは 50 ですので，最小の利得は 50 です．
- したがって，プレイヤー A は最小で 50 の利得が得られる戦略 2 を選択します．
- プレイヤー B も同様に戦略 2 を選択します．
- これは各自で確かめておいて下さい．



- 前回の講義で，確率的に戦略を選択する混合戦略についてお話しましたが，マクシミン戦略にも混合戦略があります.
- 次の例を考えてみましょう.

2人定和ゲームにおける混合戦略



- サッカーのペナルティキック，PK について考えてみます．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

サッカーの PK

- キッカーの蹴った方向にゴールキーパー (GK) が飛ぶと，ゴールの確率が低くなる
- キッカーの利得はゴールの確率
- キーパーの利得はゴールされない確率

		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4

- サッカーの PK では，キッカーはゴールの右隅か左隅に狙いをつけてボールを蹴ることにします．
- ゴールキーパー，GK は，キッカーがボールを蹴る方向を予想して飛びゴールを防ごうとします．
- キッカーの利得はゴールに入れる，ゴールする確率，GK の利得はゴールしない確率としましょう．
- キッカーの蹴る方向および GK の飛ぶ方向の組み合わせごとのゴールする確率は表の通りです．
- ただし，GK の飛ぶ方向はキッカーから見た方向です．
- GK の利得である，ゴールしない確率は， 1 からゴールする確率を引いたものなので，省略してあります．
- キッカーの蹴る方向と逆の方向に GK が飛べば，高い確率でゴールに入ります．
- GK がキッカーの蹴る方向に飛べば，ゴールに入る確率は小さくなります．
- キッカーの立場から，ゴールの確率を最大にするために，右および左に蹴る確率を決定する…という問題です．
- それでは，この問題を考えていきましょう．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

- キッカーが右に蹴る確率を p
- GK が右および左に飛んだ時の
  ゴールの確率の期待値

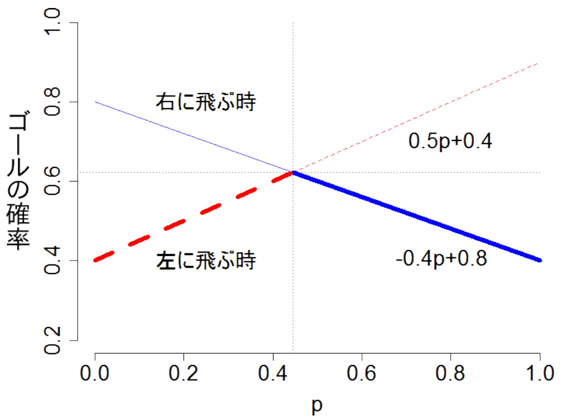
$$
\begin{aligned}
0.4p+0.8(1-p) &= -0.4p+0.8 \\
0.9p+0.4(1-p) &= 0.5p+0.4
\end{aligned}
$$

キッカー

	GK 右	GK 左
右	0.4	0.9
左	0.8	0.4

- キッカーが右にける確率を p とします.
- まず，GK が右に飛んだ時のゴールの確率の期待値を求めます.
- キッカーが右にけった時のゴールの確率は 0.4，キッカーが左にけった時のゴールの確率は 0.8 ですから，キッカーが確率 p で右にけった時のゴールの確率の期待値は， $-0.4p+0.8$ となります.
- GK が右に飛ぶのですから，右にける確率が大きいほど，ゴールの確率が小さくなります.
- 次に，GK が左に飛んだ時のゴールの確率の期待値を求めます.
- キッカーが右にけった時のゴールの確率は 0.9，キッカーが左にけった時のゴールの確率は 0.4 ですから，キッカーが確率 p で右にけった時のゴールの確率の期待値は， $0.9p+0.4(1-p)=0.5p+0.4$ となります.
- GK が左に飛ぶのですから，右にける確率が大きいほど，ゴールの確率が大きくなります.
- これを図示すると，次のようになります.

2 人定和ゲームにおける混合戦略



- この図において，縦軸はゴールする確率の期待値，横軸はキッカーが右にける確率 p の値を示しています．
- 青い右下がりの実線は，GK が右に飛ぶときのゴールの確率の期待値，
- 赤い右上がりの破線は，GK が左に飛ぶときのゴールの確率の期待値を示しています．
- マクシミン戦略では，GK はゴールの確率が小さい方に飛ぶと考えます．
- つまり，キッカーが右にける確率 p が小さい時，すなわち左にける確率が高い時には，GK が左に飛ぶ方がゴールの確率は小さくなりますので，GK は左に飛ぶと考えます．
- 逆に，キッカーが右にける確率 p が大きい時には，GK が右に飛ぶ方がゴールの確率は小さくなりますので，GK は右に飛ぶと考えます．
- この図から，ゴールの確率の小さい方の値が最大になるのは，2 つの直線が交わる時であることが分かります．

2人定和ゲームにおける混合戦略

- GK が右および左に飛んだ時のゴールの確率の期待値

$$\begin{aligned} 0.4p + 0.8(1-p) &= -0.4p + 0.8 \\ 0.9p + 0.4(1-p) &= 0.5p + 0.4 \end{aligned}$$

のうち小さい方の値が最大になるのは，両式の値が等しい時

$$-0.4p + 0.8 = 0.5p + 0.4 \to p = 4/9$$

- ゴールの確率の期待値は $-0.4p + 0.8 \fallingdotseq 0.62$

- GK が右に飛ぶときのゴールの確率は，$-0.4p + 0.8$
- GK が左に飛ぶときのゴールの確率は，$0.5p + 0.4$ でした．
- これらのうち小さい方の値が最大になるのは，両式の値が等しい時ですから，方程式，$-0.4p + 0.8 = 0.5p + 0.4$ を解くと，$p = 4/9$ となります．
- すなわち，右にける確率を 4/9 とするのが最適で，この時のゴールの確率の期待値は 0.62 となります．

2人定和ゲームにおける混合戦略

- GK が右に飛ぶ確率を q
- キッカーが右および左に蹴った時の
  ゴールの確率の期待値

$$\begin{aligned} 0.4q + 0.9(1-q) &= -0.5q + 0.9 \\ 0.8q + 0.4(1-q) &= 0.4q + 0.4 \end{aligned}$$

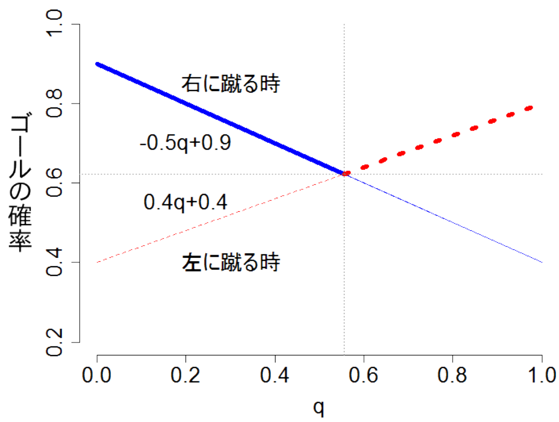
		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4

- 今度は GK の立場から考えてみましょう.
- GK が右に飛ぶ確率を q とします.
- まず，キッカーが右に蹴った時のゴールの確率の期待値を求めます.
- GK が右に飛んだ時のゴールの確率は 0.4,
- GK が左に飛んだ時のゴールの確率は 0.9 ですから,
- GK が確率 q で右に飛んだ時のゴールの確率の期待値は,

  $$0.4q + 0.9(1-q) = -0.5q + 0.9$$

  となります.
- 次に，キッカーが左に蹴った時のゴールの確率の期待値を求めます.
- GK が右に飛んだ時のゴールの確率は 0.8,
- GK が左に飛んだ時のゴールの確率は 0.4 ですから,
- GK が確率 q で右に飛んだ時のゴールの確率の期待値は,
  $0.8q + 0.4(1-q) = 0.4q + 0.4$. となります.
- これを図示すると，次のようになります.

2 人定和ゲームにおける混合戦略



- この図において，縦軸はゴールする確率の期待値，横軸は GK が右に飛ぶ確率 q の値を示しています．
- 青い右下がりの実線は，キッカーが右に蹴るときのゴールの確率の期待値，
- 赤い右上がりの破線は，キッカーが左に蹴るときのゴールの確率の期待値を示しています．
- キッカーはゴールの確率が大きい方に蹴ると考えます．
- この図から，ゴールの確率の大きい方の値が最小になるのは，2 つの直線が交わる時であることが分かります．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

- キッカーが右および左に蹴った時のゴールの確率の期待値

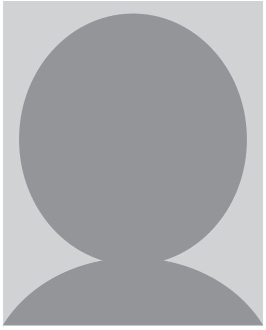
$$
\begin{aligned}
0.4q + 0.9(1-q) &= -0.5q + 0.9 \\
0.8q + 0.4(1-q) &= 0.4q + 0.4
\end{aligned}
$$

のうち大きい方の値が最小になるのは，
両式の値が等しい時

$$-0.5q + 0.9 = 0.4q + 0.4 \to q = 5/9$$

- ゴールの確率の期待値は $-0.5q + 0.9 \to 0.62$

- キッカーが右に蹴るときのゴールの確率は，$-0.5q + 0.9$
- キッカーが左に蹴るときのゴールの確率は，$0.4q + 0.4$ でした．
- これらのうち大きい方の値が最小になるのは，両式の値が等しい時ですから，方程式，
$$-0.5q + 0.9 = 0.4q + 0.4$$
を解くと，$q = 5/9$ となります．
- この時のゴールの確率の期待値は 0.62 となります．
- このゴールの確率は，キッカーの立場からゴールの確率が最大になるようにした場合と同じ値になります．



- 今の例では，二種類の戦略の混合戦略でしたので，単純な一次方程式を解くことで，簡単に解を求めることができました．
- 三種類以上の戦略の混合戦略の場合には，同じ方法では解けませんが，線形最適化法を用いて解くことができます．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

マクシミン戦略と線形計画法

- 2 人定和ゲームについて考える
- プレイヤー A は m 種類の戦略
  各戦略を選択する確率分布 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$

$$p_1, p_2, \cdots, p_m \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

- プレイヤー B は n 種類の戦略
  各戦略を選択する確率分布 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$

$$q_1, q_2, \cdots, q_n \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$$

- まず，一般の 2 人定和ゲームについて考えます.
- プレイヤー A は m 種類の戦略から確率的に選択を行います.
- 各戦略を選択する確率分布を p_1 から p_m とします.
- m 種類の戦略から選択するので，確率 p_1 から p_m の総和は 1 になります.
- プレイヤー B は n 種類の戦略から確率的に選択を行います.
- 各戦略を選択する確率分布を q_1 から q_n とします.
- n 種類の戦略から選択するので，確率 q_1 から q_n の総和は 1 になります.

2 人定和ゲームにおける混合戦略

プレイヤー A から見た利得行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{プレイヤー B} \\
\text{プレイヤー A} & \boxed{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}}
\end{array}
$$

- プレイヤー A の利得を並べた $m \times n$ 型の利得行列を $\boldsymbol{A}$ とします.
- 2 人定和ゲームですから，プレイヤー A の利得が決まれば，プレイヤー B の利得は実質的に決まりますので，プレイヤー A の利得が分かれば十分です.

2人定和ゲームにおける混合戦略

- プレイヤー A の立場から考える
- プレイヤー B が戦略 j を選択しているとき，プレイヤー A の利得の期待値は

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m$$

- 先ほどの PK の例と同様に，利得の期待値を求めます．
- プレイヤー A の立場から考えます．
- プレイヤー B が戦略 j を選択しているとき，プレイヤー A の利得の期待値はこの式のようになります．
- 戦略の数が m 種類になっていますが，利得の期待値の求め方は PK の例と同じです．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

- プレイヤー B が各戦略 $j = 1, 2, \cdots n$ を選択している時の，プレイヤー A の利得の期待値のうち最小値を λ とおくと，

$$
\begin{aligned}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m &\geq \lambda \\
a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m &\geq \lambda \\
&\vdots \\
a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m &\geq \lambda
\end{aligned}
$$

- プレイヤー B が各戦略を選択している時の，プレイヤー A の利得の期待値のうち最小値を λ と置きます．
- λ は最小値ですから，プレイヤー B が各戦略を選択している時のプレイヤー A の利得の期待値は λ 以上になります．
- したがって，ここに示す不等式が成り立ちます．

2 人定和ゲームにおける混合戦略

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & \lambda \\
\text{制約} & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq \lambda \\
 & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geq \lambda \\
 & \vdots \\
 & a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geq \lambda \\
 & p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1 \\
 & p_1, p_2, \cdots, p_m \geq 0
\end{array}
$$

- これで，準備ができましたので，マクシミン戦略を線形最適化問題として定式化します．
- 繰り返しになりますが，マクシミン戦略は，プレイヤー B がプレイヤー A の利得が最小になるような戦略を選択したとして，その最小の利得を最大にする戦略です．
- 利得の最小値は λ ですから，λ の最大化がこの問題の目的になります．
- 次に制約条件です．まずは，直前に示したものです．
- プレイヤー B が各戦略を選択している時の，プレイヤー A の利得の期待値は λ 以上になります．
- 次は，確率に関する制約です．
- プレイヤー A は m 種類の戦略から確率的に戦略を選択しますので，各戦略の選択確率の和は 1 になります．
- また，確率は 0 以上の値をとります．
- 以上で，マクシミン戦略の混合戦略を線形最適化問題として定式化できました．
- この線形最適化問題ですが，目的関数 λ が制約の右辺にあって，見慣れた線形最適化問題とは見た目が異なるので，戸惑われたかもしれません．
- ここで重要なのは，λ は決定変数でもあるということです．
- すなわち，この問題における決定変数は p_1 から p_m と λ なのです．
- 見た目を変えるため，制約式の右辺の λ を左辺に移項します．

2人定和ゲームにおける混合戦略

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & \lambda \\
\text{制約} & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m - \lambda \geq 0 \\
& a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m - \lambda \geq 0 \\
& \vdots \\
& a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m - \lambda \geq 0 \\
& p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1 \\
& p_1, p_2, \cdots, p_m \geq 0
\end{array}
$$

- λ が決定変数の一つであることに注意して，あらためてこの線形最適化問題を見ると，見慣れた線形最適化問題と変わらないことがお分かりになると思います．
- プレイヤーBの立場から，プレイヤーAの利得の期待値を最小にする場合も，同様の方法で定式化することになります．
- そして，その最適解はプレイヤーAが自らの利得の期待値を最大化する場合と一致します．

2人定和ゲームにおける混合戦略

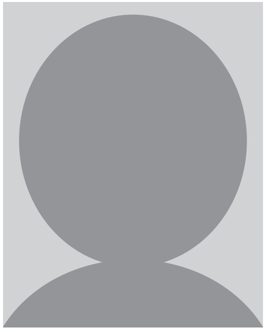
キッカー / GK

	右	左
右	0.4	0.9
左	0.8	0.4

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & \lambda \\
\text{制約} & 0.4p_1 + 0.8p_2 - \lambda \geq 0 \\
& 0.9p_1 + 0.4p_2 - \lambda \geq 0 \\
& p_1 + p_2 = 1 \\
& p_1, p_2 \geq 0
\end{array}
$$

- 最後に，先ほどのPKの例を線形最適化問題で定式化したものを示します.
- 当然のことながら，この問題の解は先ほど求めた解と一致します.

展開型ゲームと先読み推論



- ここまで紹介したゲームは，プレイヤーが同時に行動するものでした．
- ここでは，プレイヤーが交互に行動するゲームである，展開型ゲームについてお話します．
- それでは，さっそく例を見てみましょう．
-

展開型ゲームと先読み推論

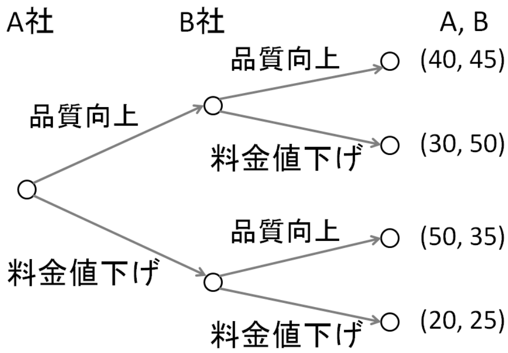
		B 社	
		品質向上	料金値下げ
A 社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

- A 社と B 社が順番に行動する展開型ゲーム
- 展開型ゲームはゲームの木で表すことができる

- これは前回使用したゲームの例です．
- ここでは先に A 社が行動して，次に B 社が行動するということにします．

展開型ゲームと先読み推論

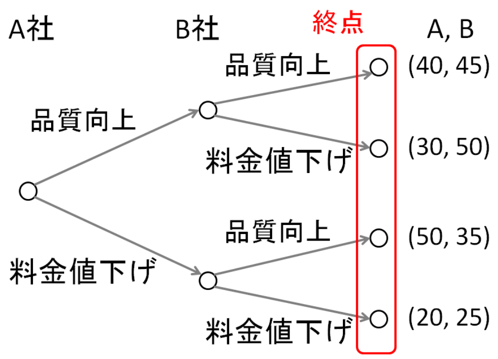
ゲームの木



- 展開型ゲームはゲームの木で表すことができます.

展開型ゲームと先読み推論

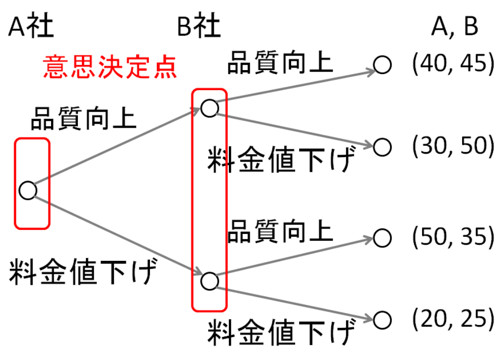
ゲームの木



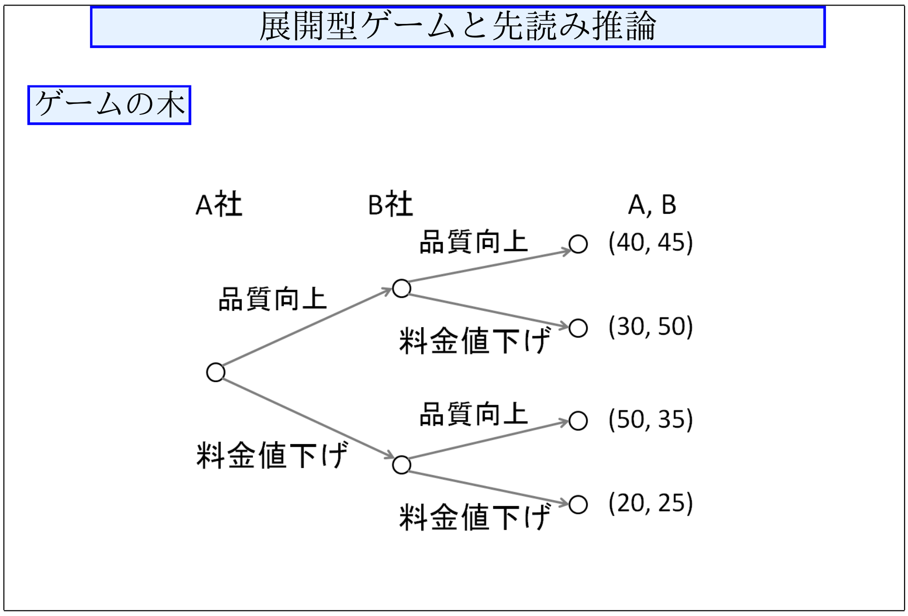
- ゲームの木の末尾の点はゲームの結果を示し，終点と呼ばれます．

展開型ゲームと先読み推論

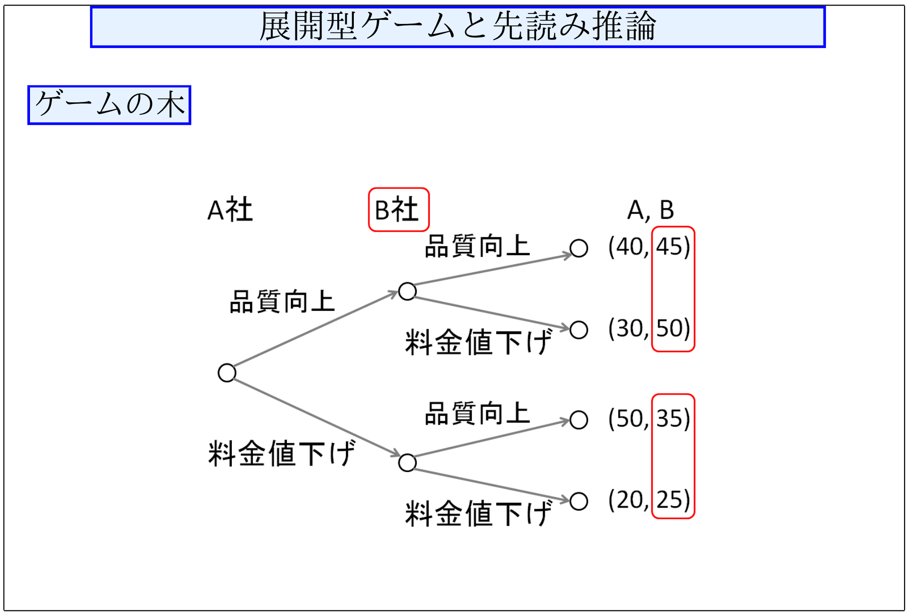
ゲームの木



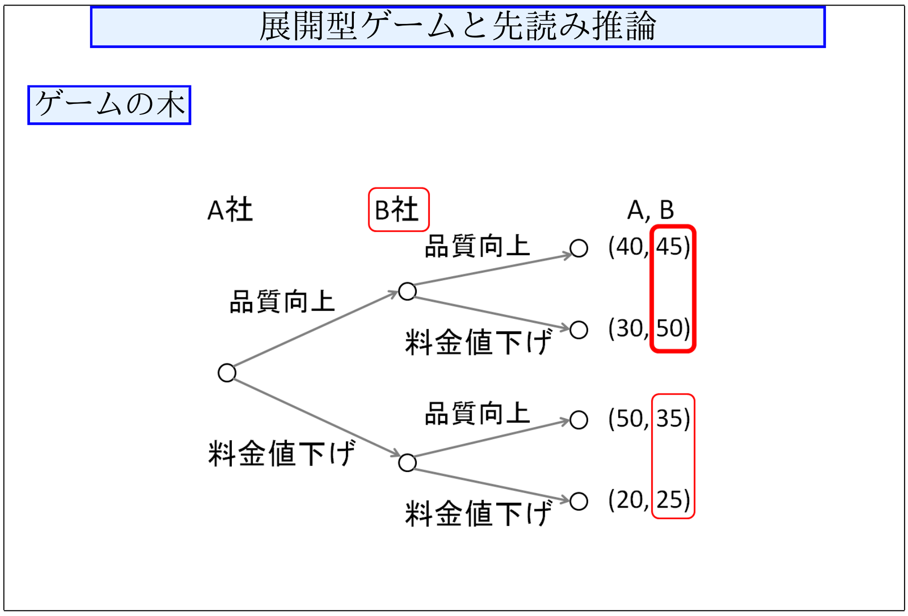
- 終点以外の点は特定のプレイヤーが行動を選択する箇所を示し，意思決定点と呼ばれます．
- 意思決定点は「手番」と呼ばれることもあります．
- 枝は意思決定点から各プレイヤーの選択可能な行動ごとに伸びて、次の意思決定点あるいは終点とつながっています．



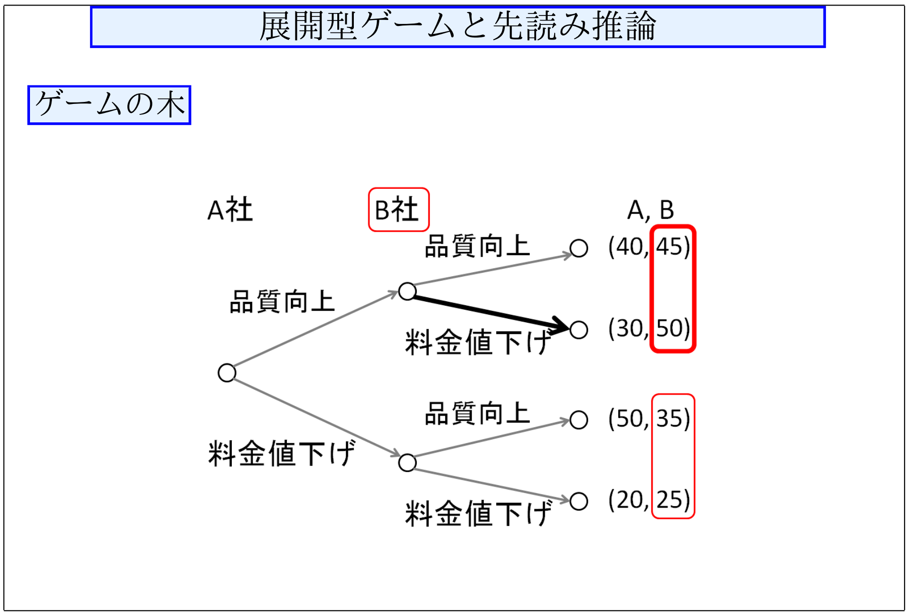
- このゲームは，A 社が先に行動するゲームです.
- 一番左の点は A 社の意思決定点で，A 社は品質向上か料金値下げを選択します.
- 左から 2 番目の 2 個の点は B 社の意思決定点です.
- B 社の 2 個の意思決定点のうち上の点では，A 社が品質向上を選択した場合に，B 社が品質向上か料金値下げを選択します.
- 下の点では，A 社が料金値下げを選択した場合に，B 社が品質向上か料金値下げを選択します.
- 一番右の点は終点で，B 社が行動を選択するとゲームは終わりです.
- 終点にはプレイヤーの利得が示されています.



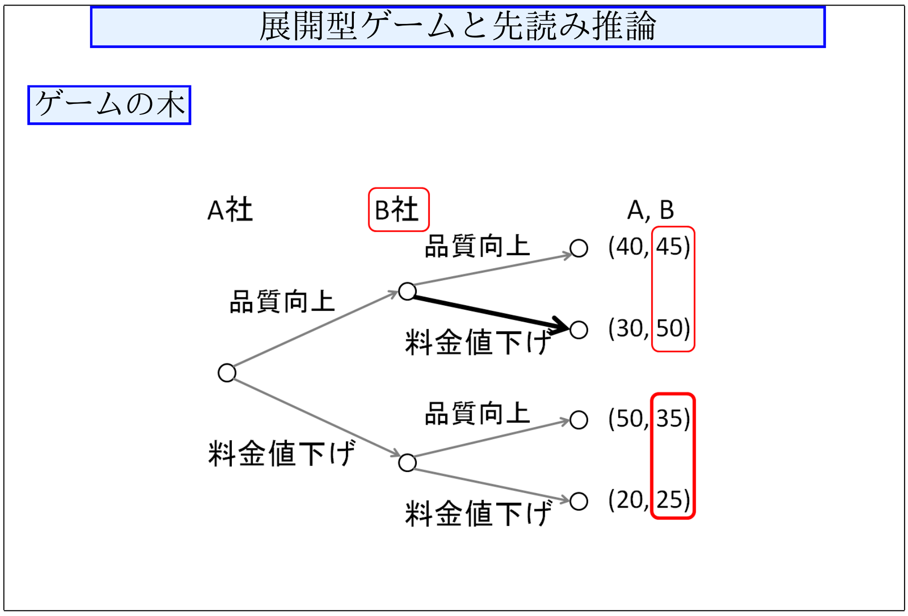
- 展開ゲームは最後の手番から考えていきます.
- このゲームでは A 社と B 社が 1 回ずつ行動するだけですので，後の B 社の手番を考えます.
-



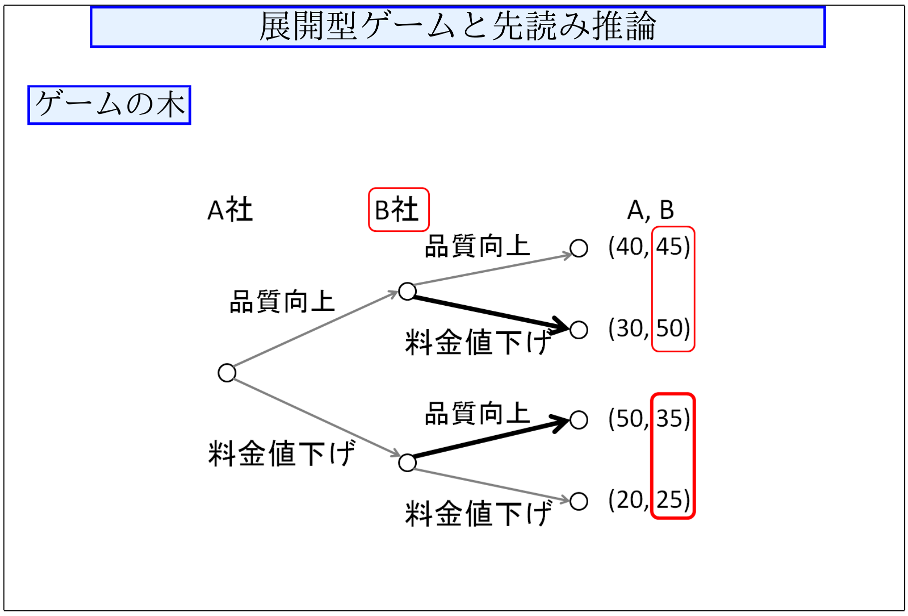
- A 社が品質向上を行ったとすると，B 社も品質向上を行うと利得は 45，B 社は料金値下げを行うと利得は 50 です．



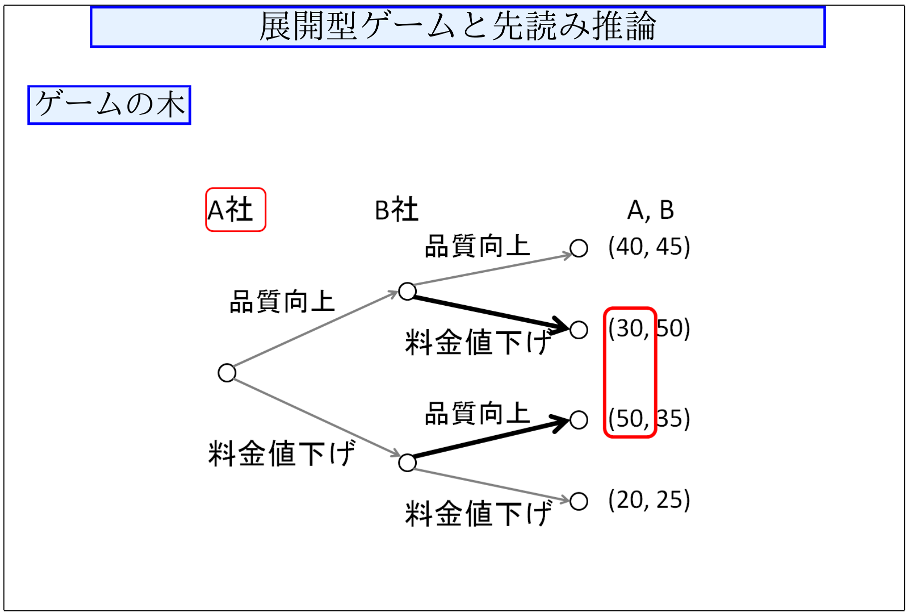
- したがって，B 社はより大きな利得を得られる料金値下げを選択します．
-



- 一方，A 社が料金値下げを行ったとすると，B 社が品質向上を行うと利得は 35，B 社も料金値下げを行うと利得は 25 です．



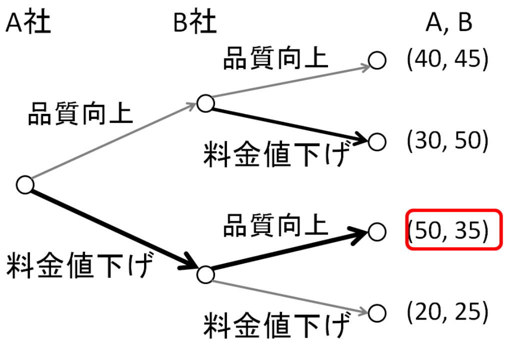
- したがって，B 社はより大きな利得を得られる品質向上を選択します.
- B 社は A 社が選択した行動を知ってから，行動を選択することができます.



- 次に，A 社の手番を考えます．
- A 社が品質向上を行うと，B 社は料金値下げを行いますから，A 社の利得は 30 になります．
- A 社が料金値下げを行うと，B 社は品質向上を行いますから，A 社の利得は 50 になります．
- したがって，A 社はより利得の大きな料金値下げを選択します．

展開型ゲームと先読み推論

ゲームの木



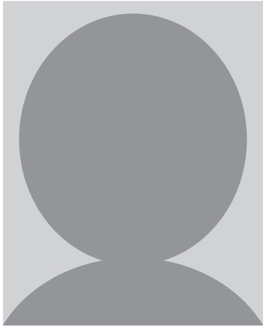
- このゲームの解は，A 社が料金値下げ，B 社が品質向上で，その結果，利得は，A 社が 50，B 社が 35 となります．
- このように最後の手番からプレイの順序とは逆に考えて，解を導出する方法を**先読み推論**あるいは**逆向き推論**と呼びます．

展開型ゲームと先読み推論

		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

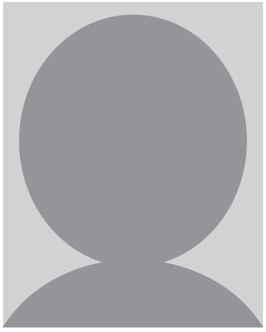
- 展開型のゲームの解は標準型ゲームのナッシュ均衡解（の一つ）と一致
- 最後の手番からプレイの順序とは逆に考えて解を導出する方法　…　**先読み推論あるいは逆向き推論**

- この解は，この利得行列で表される標準型ゲームのナッシュ均衡解の一つと一致します．
- このゲームをB社が先に選択を行うように変更すると，標準型ゲームのもう一つのナッシュ均衡解と一致します．
- これについては，各自で確認しておいて下さい．



- 今の例では，プレイヤー A と B が一度ずつ交互に行動しておしまいでしたが，交互に何度も行動するような展開型ゲームでも，同様に先読み推論により解くことができます.
- それでは，チェスや将棋のようにプレイヤーが交互に行動するゲームも同様に解けるかというと，原理的には先読み推論で解けるのですが，計算量が莫大になりますので，実際には計算量を減らすための工夫と妥協が必要になります.

繰り返しゲームと協調の出現



- ゲーム理論では，プレイヤーは自らの利得を最大にするためのみに，利己的に振舞います．
- ここでは，同じゲームを何度も繰り返す「繰り返しゲーム」において，協調的な現象が生じる可能性についてお話しします．

繰り返しゲームと協調の出現

囚人のジレンマ

		容疑者 B	
		黙秘	自白
容疑者 A	黙秘	(2 年, 2 年)	(10 年, 釈放)
	自白	(釈放, 10 年)	(5 年, 5 年)

- ここで用いる例は，ゲーム理論でもっとも有名なゲームの一つである囚人のジレンマと呼ばれるゲームで，以下のようなものです．
- 共同で重罪を犯したと思われる 2 人の容疑者 A と B が別件の微罪で捕まった．
- 肝心の重罪の証拠はほとんどなく，容疑者は 2 人とも完全黙秘している．
- そこで警察は容疑者 A と B を順に訪れ次のような司法取引をもちかけた．
- 容疑者が 2 人とも黙秘するなら，2 人とも懲役 2 年とする．
- 一方の容疑者が自白し，もう一方の容疑者が黙秘するなら，自白した容疑者は無罪釈放し，黙秘した容疑者は懲役 10 年とする．
- 容疑者が 2 人とも自白するなら，2 人とも懲役 5 年とする．
- 各容疑者は，懲役を短くするために黙秘すべきか，それとも自白すべきか…という問題です．

繰り返しゲームと協調の出現

囚人のジレンマ

		容疑者 B	
		黙秘	自白
容疑者 A	黙秘	(2 年,2 年)	(10 年, 釈放)
	自白	(釈放, 10 年)	(5 年, 5 年)

- このゲームには支配戦略が存在し，両者とも自白するのが解になり，この時は両者とも懲役 5 年になります．

繰り返しゲームと協調の出現

囚人のジレンマ

容疑者 A ／ 容疑者 B

	黙秘	自白
黙秘	(2 年,2 年)	(10 年, 釈放)
自白	(釈放, 10 年)	(5 年, 5 年)

- このゲームの面白いところは，両者とも黙秘していれば，懲役 2 年であり，その方が両者ともハッピーであるにもかかわらず，両者黙秘は解にならないということです．
- これは，両者黙秘であれば，両者とも懲役 2 年ですが，ここで自分だけ自白すれば，自分は無罪釈放となるので，自白するのが最適反応戦略になります．
- 一方が自白でもう一方が黙秘であれば，黙秘している容疑者は自白するのが最適反応戦略になり，両者自白で均衡します．
- このようなジレンマは，環境問題など，現実社会でも広く見られます．

繰り返しゲームと協調の出現

一般化した囚人のジレンマゲーム

プレイヤーB

プレイヤーA	協調	裏切り
協調	(6, 6)	(1, 9)
裏切り	(9, 1)	(3, 3)

- そんなこともありまして，囚人のカバーストーリーを外して，戦略を「協調」と「裏切り」として，利得を得点とします．
- このゲームにおいても，解は両者裏切りで，その時の両者の利得は，両者協調の場合よりも小さくなります．
- このゲームを用いて協調に関して考えていきます．

繰り返しゲームと協調の出現

2回繰り返しゲーム

- 2回目は裏切りが支配戦略
- 1回目は2回目と独立に考えられる
  → やはり裏切りが支配戦略

有限回繰り返しゲーム

- 3回以上の有限回繰り返しゲーム
  → 裏切り続けるのが支配戦略

- 囚人のジレンマは，1回限りの行動のゲームでしたが，行動を何回も繰り返し行うようにすると，長目に見れば，協調したほうが両者の利得が大きくなり，協調が出現するのではないか，というアイディアについて検討します．
- まず，2回の繰り返しゲームについて考えます．
- 2回目のゲームは，裏切っても後で報復を受けることがないので，繰り返しのない単独のゲームと同じになります．
- したがって，両者とも裏切るのが支配戦略になります．
- すると，1回目のゲームでいずれの戦略を選択しようと，2回目のゲームで両者裏切りになるのですから，これまた繰り返しのない単独のゲームと同じになり，両者とも裏切るのが支配戦略になります．
- 結局，2回の繰り返しでは，各回が独立の繰り返しのないゲームとなり，協調は生じないという，つまらない結果になりました．
- 繰り返し回数が3回以上でも，繰り返し回数が有限回の時には，同様の結果になります．

繰り返しゲームと協調の出現

- 毎回の利得 a
- 割引因子 $\delta \quad (0 \leq \delta < 1)$
- 無限回繰り返しゲームにおける割引利得の総和

$$a + a\delta + a\delta^2 + \cdots = \frac{a}{1-\delta}$$

- a 円を年利 r の口座に預金
  $\rightarrow n$ 年後には $a(1+r)^n$ 円
- n 年後に得る a 円は現在得る a 円より割り引いて考えるほうが妥当

- 今度は繰り返しが無限回のゲームについて考えます．
- 無限回の繰り返しというのは，現実にはありませんが，先読みができないほど多数の繰り返しのことと考えます．
- 無限回繰り返しゲームで，毎回の利得が a であるとして，現在から将来に渡る利得の総和を考えます．
- ここで，割引因子という概念を導入します．
- 未来に得る利得 a は，現在得る利得 a より価値を小さくする，すなわち割り引いて考える，というものです．
- 例えば，現在 a 円を得てそれを年利 r の口座に預金すれば，n 年後には $a(1+r)^n$ 円になります．
- したがって，n 年後に得る a 円は現在得る a 円より割り引いて考えます．
- 利息分を割り引くと，n 年後の a 円は，現在の a 円の，$(1+r)$ の n 乗分の 1 と等価になります．
- 割引因子として 0 以上 1 未満の δ を用います．
- 毎回の利得が a の割引利得の総和は，等比数列の和の公式から $1-\delta$ 分の a となります．

繰り返しゲームと協調の出現

無限回繰り返しゲーム

- 最初は協調し，相手が協調する限り協調を続けるが，相手が一度でも裏切るとそれ以降裏切り続ける戦略 $\cdots$ **トリガー戦略**
- 両プレイヤーがトリガー戦略を選択
  $\rightarrow$ 両者は協調を続ける
  割引利得の総和

$$u_{Cc} = 6 + 6\delta + 6\delta^2 + \cdots = \frac{6}{1-\delta}$$

- 次に，トリガー戦略と呼ばれる戦略を導入します．
- トリガー戦略とは，最初は協調し，相手が協調する限り協調を続けるが，相手が一度でも裏切るとそれ以降裏切り続ける戦略です．
- 両プレイヤーがトリガー戦略をとる場合，両者は協調し続けますから，毎回の利得は6で，割引利得の総和 u_{Cc} (ユーラージシースモールシー) は，この式のようになります．
- ラージシーは注目しているプレイヤーが協調戦略，スモールシーはもう一方のプレイヤーが協調戦略を選択していることを表しています．

繰り返しゲームと協調の出現

無限回繰り返しゲーム

- 一方がトリガー戦略，もう一方が裏切り続ける
- 裏切り続けるプレイヤーの割引利得の総和

$$u_{Dc} = 9 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 9 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{9-6\delta}{1-\delta}$$

- トリガー戦略を選択したプレイヤーの割引利得の総和

$$u_{Cd} = 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 1 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{1+2\delta}{1-\delta}$$

- 今度は，一方のプレイヤーがトリガー戦略，もう一方のプレイヤーが裏切り続ける戦略をとる場合を考えます．
- 裏切り続けるプレイヤーの割引利得の総和ユーラージディースモールシーは，この式のようになります．
- 最初の 1 回は，裏切りにより大きな利得 9 を得ますが，2 回目以降は相手も裏切るので，利得は 3 になります．
- もう一方のトリガー戦略をとるプレイヤーの割引利得の総和は，下の式のようになります．
- 裏切り続けるプレイヤーの割引利得の総和より小さくなります．

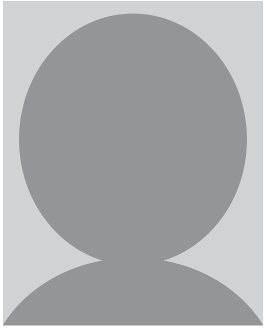
繰り返しゲームと協調の出現

無限回繰り返しゲーム

- $u_{Cc} \geq u_{Dc}$ ならば，プレイヤーは裏切らず協調し続ける
$$\frac{6}{1-\delta} \geq \frac{9-6\delta}{1-\delta}$$
- $\delta \geq 1/2 \cdots$ トリガー戦略を選択
- $\delta < 1/2 \cdots$ 裏切り戦略を選択

- トリガー戦略同士のゲームにおけるプレイヤーの割引利得の総和が，一方が裏切り戦略でもう一方がトリガー戦略のゲームにおける裏切り戦略のプレイヤーの割引利得の総和と同等以上であれば，プレイヤーは裏切ることなく協調し続けます．
- その条件は，ユーラージシースモールシーが，ユーラージディースモールシー以上になることです．
- この不等式を解きますと，δ が 1/2 以上であれば，裏切ることにより割引利得の総和は大きくならないので，両者がトリガー戦略を選択することが最適な戦略なります．
- 一方，δ が 1/2 より小さければ，裏切ることにより割引利得の総和は大きくなりますので，裏切り続けることが最適な戦略になります．
- つまり，裏切りによる短期的な利得の増加が，長期的な利得の損失より大きくなれば裏切るということになります．
- この例は，囚人のジレンマゲームを無限回繰り返しゲームにすると，プレイヤーは自らの割引利得の総和を最大にするように，利己的に振る舞っているにも関わらず，協調的な行動が現れることがあることを示しています．
- ヒトやヒト以外の動物が一見「利他的」な行動をとることが観察されますが，その背後にはこのような行動原理が潜んでいるのかもしれません．
- また，有限回繰り返しゲームでは協調的な行動がまったく現れないという結果と対照的な結果になったという点も興味深いと思います．

オークション



- 最後にオークションについてお話します．
- 魚市場のせりや美術品のオークション，それからバナナの叩き売りなどを映像でご覧になった方は多いかと思います．
- また，最近ではインターネットオークションがポピュラーになってきたので，オークションに参加した経験をお持ちの方もいるかと思います．
- ここでは，オークションをゲーム理論で分析します．
-
- オークションの方式，プロトコルと言いますが，オークションのプロトコルには様々なものがあります．

オークション

- 魚市場やオークションハウスで行われる，
  価格が競り上がっていくオークション
  … **イングリッシュオークション**
- バナナの叩き売りや花市場で行われる，
  価格が下がっていくオークション
  … **ダッチオークション**
- 公開オークション ／ 封印入札
- ファーストプライス・オークション
  ／ セカンドプライス・オークション

- 例えば，魚市場やオークションハウスで行われるオークションでは価格がせり上がっていきます．
- このプロトコルをイングリッシュオークションと言います．
- 一方，バナナの叩き売りや花市場で行われるオークションでは価格が下がっていきます．
- このプロトコルをダッチオークションと言います．
- 入札は，競りのように入札額が他の入札者に公開されるものと，不動産の競売 (ケイバイ) のように入札額が他の入札者に公開されないものがあります．
- また，最高額の入札者が落札し，落札者の入札額で売買が行われるファーストプライス・オークションのほかに，最高額の入札者が落札しますが，2 番目の入札額で売買が行われるセカンドプライス・オークションというプロトコルもあります．
- それでは，まず，セカンドプライス・オークションについて分析してみましょう．

オークション

セカンドプライス・オークション

- 封印入札とする
- 最高額入札者が落札
- 2 番目の入札額で購入
- 自分は財を v_A と評価し，入札額 x_{A*} で入札
- 他に最高額をつけている相手の入札額 x_B

- オークションのプロトコルは次の通りです.
- 入札は非公開で 1 回限りとします.
- 最高額入札者が落札し，2 番目の入札額で購入することとします.
- プレイヤー A はオークションの対象である財を v_A と評価し，入札額 x_{A*} で入札します.
- 最高額をつけている相手の入札額を x_B とします.

オークション

セカンドプライス・オークション

$x_{AL} < v_A$ の時

$x_B < x_{AL}$：自分が落札し，x_B で購入
→ 利得 $v_A - x_B$

$x_{AL} < x_B < v_A$：相手が落札
→ 利得 0

$x_{AL} < v_A < x_B$：相手が落札
→ 利得 0

- まず，プレイヤー A が，評価額 v_A より小さい額 x_{AL} で入札したとします．
- もし，x_B が x_{AL} よりも小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 x_B で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 x_B の差，すなわち $v_A - x_B$ となります．
- この利得は正の値になりますから，プレイヤー A は得をしたことになります．
- もし，x_B が x_{AL} よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．
-

オークション

セカンドプライス・オークション

$x_A = v_A$ の時

$x_B < x_A = v_A$：自分が落札し，x_B で購入
→ 利得 $v_A - x_B$

$x_A = v_A < x_B$：相手が落札
→ 利得 0

- 次に，プレイヤー A が，評価額 v_A と等しい額 x_A で入札したとします．
- もし，x_B が x_A よりも小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 x_B で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 x_B の差，すなわち $v_A - x_B$ となります．
- この利得は正の値になりますから，プレイヤー A は得をしたことになります．
- もし，x_B が x_A よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．

オークション

セカンドプライス・オークション

$x_{AH} > v_A$ の時

$x_B < v_A < x_{AH}$：自分が落札し，x_B で購入
$\rightarrow$ 利得 $v_A - x_B$

$v_A < x_B < x_{AH}$：自分が落札
$\rightarrow$ 利得 $-(x_B - v_A)$

$x_A < x_B$：相手が落札
$\rightarrow$ 利得 0

- 今度は，プレイヤー A が，評価額 v_A より大きい額 x_{AH} で入札したとします．
- もし，x_B が x_{AH} よりも小さく，かつ v_A より小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 x_B で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 x_B の差，すなわち $v_A - x_B$ となります．
- この利得は正の値になりますから，プレイヤー A は得をしたことになります．
- もし，x_B が v_A よりも大きく，x_{AH} より小さければ，プレイヤー A が落札し，評価額 v_A よりも大きな購入価格 x_B で購入しますので，プレイヤー A の利得は $-(x_B - v_A)$ となります．
- この場合，プレイヤー A の利得は負の値になりますので，プレイヤー A は損をすることになります．
- もし，x_B が x_{AH} よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．

オークション

セカンドプライス・オークション

$x_B \diagdown x_{A*}$	$x_{AL}(< v_A)$	v_A	$x_{AH}(> v_A)$
$x_B < x_{AL} < v_A$	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$
$x_{AL} < x_B < v_A$	0	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$
$v_A < x_B < x_{AH}$	0	0	$-(x_B - v_A)$
$v_A < x_{AH} < x_B$	0	0	0

- 以上をまとめますと，この表のようになります．
- 表を見ますと，財の評価額 v_A で入札すれば，他の入札額の場合より利得が小さくなることがなく，支配戦略になっています．
- 素直に自分の評価額を入札すれば良い…というのは，入札者にとっては非常に都合の良いプロトコルであると言えます．
- 次に，イングリッシュオークションについて，ゲーム理論で分析してみましょう．

オークション

イングリッシュ・オークション

- 公開入札とする
- 最高額入札者が落札
- 1 番目 (落札者) の入札額で売買
- 自分は財を v_A と評価し，入札を降りる額 x_{A*}
- 最高額で降りる相手の入札額 x_B

- プロトコルはここに示す通りです.
- 公開入札とし，価格を競り上げていきます.
- 最高額入札者が落札し，落札者の入札額で購入します.
- すなわち，ファーストプライス・オークションです.
- 自分は財を v_A と評価し，入札を降りる額を x_{A*} とします.
- 最高額で降りる相手の入札額を x_B とします.
- 互いに相手より僅かに高い金額で入札し，自分の設定した入札額の上限を超えた時点で入札を降りるということになります.

オークション

イングリッシュ・オークション

$x_{AL} < v_A$ の時

$x_B < x_{AL}$：自分が落札し，$x_B + \Delta$ で購入
→ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$x_{AL} < x_B < v_A$：相手が落札
→ 利得 0

$x_{AL} < v_A < x_B$：相手が落札
→ 利得 0

- まず，プレイヤー A が，評価額 v_A より小さい額 x_{AL} を超えたら入札を降りるとします．
- もし，x_B が x_{AL} よりも小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 x_B に僅かな額 Δ を加えた落札価格で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 $x_B + \Delta$ の差，すなわち $v_A - x_B - \Delta$ となります．
- この利得は正の値になりますから，プレイヤー A は得をしたことになります．
- もし，x_B が x_{AL} よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．

オークション

イングリッシュ・オークション

$x_A = v_A$ の時

$x_B < x_A = v_A$：自分が落札し，$x_B + \Delta$ で購入
$\rightarrow$ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$x_A = v_A < x_B$：相手が落札
$\rightarrow$ 利得 0

- 次に，プレイヤー A が，評価額 v_A と等しい額 x_A を超えたら入札を降りるとします．
- もし，x_B が x_A よりも小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 $x_B + \Delta$ で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 $x_B + \Delta$ の差，すなわち $v_A - x_B - \Delta$ となります．
- この利得は正の値になりますから，プレイヤー A は得をしたことになります．
- もし，x_B が x_A よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．

オークション

イングリッシュ・オークション

$x_{AH} > v_A$ の時

$x_B < v_A < x_{AH}$：自分が落札し，$x_B + \Delta$ で購入
$\rightarrow$ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$v_A < x_B < x_{AH}$：自分が落札
$\rightarrow$ 利得 $-(x_B - v_A) - \Delta$

$x_A < x_B$：相手が落札
$\rightarrow$ 利得 0

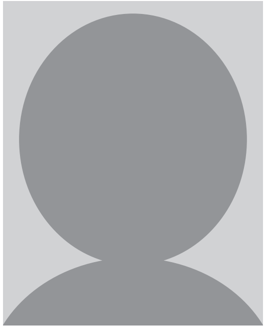
- 今度は，プレイヤー A が，評価額 v_A より大きい額 x_{AH} で入札を降りるとします．
- もし，x_B が x_{AH} よりも小さく，かつ v_A より小さければ，プレイヤー A が落札し，価格 $x_B + \Delta$ で購入しますので，プレイヤー A の利得は，評価額 v_A と購入価格 $x_B + \Delta$ の差，すなわち $v_A - x_B - \Delta$ となります．
- もし，x_B が v_A よりも大きく，x_{AH} より小さければ，プレイヤー A が落札し，評価額 v_A よりも大きな購入価格 $x_B + \Delta$ で購入しますので，プレイヤー A の利得は $-(x_B + \Delta - v_A)$ となります．
- この場合，プレイヤー A の利得は負の値になりますので，プレイヤー A は損をすることになります．
- もし，x_B が x_{AH} よりも大きければ，相手が落札しますので，プレイヤー A の利得は 0 となります．

オークション

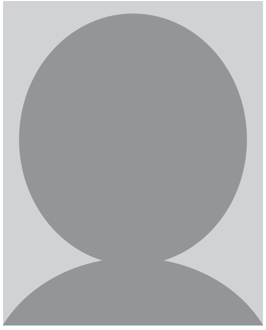
イングリッシュ・オークション

$x_B \diagdown x_{A*}$	$x_{AL}(< v_A)$	v_A	$x_{AH}(> v_A)$
$x_B < x_{AL} < v_A$	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$
$x_{AL} < x_B < v_A$	0	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$
$v_A < x_B < x_{AH}$	0	0	$-(x_B - v_A) - \Delta$
$v_A < x_{AH} < x_B$	0	0	0

- 以上をまとめますと，この表のようになります．
- イングリッシュオークションにおいても，財の評価額 v_A を超えたら入札を降りるのが，支配戦略になっています．
- この場合も，素直に自分の評価額に達するまで入札すれば良い…という，入札者にとって非常に都合の良いプロトコルであると言えます．
- また，セカンドプライスオークションの利得と比較しますと，相手の入札額より僅かに積み上げた Δ の分が異なるだけで，ほとんど同じ結果になっていることがわかります．
- このように，ゲーム理論を用いれば，様々なプロトコルのオークションを分析することができます．
- ゲーム理論によるオークションの分析は，より優れたオークションプロトコルの開発にも利用されます．
- その際，例えば，支配戦略が存在するという分かりやすさ，財を最も高く評価した入札者に財が渡るという経済的な性質，談合等の不正を防ぐといったことが考慮されます．



- 2 回に渡り，ゲーム理論についてお話しました．
- 今回の内容，特に最後のオークションはゲーム理論の幅広い応用の可能性を感じられたのではないかと思います．
- オークション以外にもゲーム理論は，様々な社会現象の分析に利用されています．
- 興味のある方は，文献を調べてみて下さい．
- 今回はこれで終わりにします．



- 2 回に渡り，ゲーム理論についてお話しました．
- 今回の内容，特に最後のオークションはゲーム理論の幅広い応用の可能性を感じられたのではないかと思います．
- オークション以外にもゲーム理論は，様々な社会現象の分析に利用されています．
- また，前回にもお話しましたように，ゲーム理論の応用は，いわゆる社会科学的分野に限らず，生物進化，通信ネットワーク，機械の制御などにも及びます．
- 興味のある方は，文献を調べてみて下さい．
- ゲーム理論に関する書籍は，一般書から高度な専門書まで，数学的な基礎から特定の問題への応用まで多彩に出版されていますので，自分に合った文献を見つけて学習されると良いでしょう．
- 今回はこれで終わりにします．