

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
… 相手の戦略に対する**最適反応戦略**
- 各プレイヤーのとり戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … **ナッシュ均衡解**

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
… 相手の戦略に対する最適反応戦略
- 各プレイヤーのとりうる戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(40, 45)	(30, 50)
	戦略 2	(50, 35)	(20, 25)

- 相手の戦略に対して自らの利得を最大にする戦略
… 相手の戦略に対する最適反応戦略
- 各プレイヤーのとりうる戦略が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略 … ナッシュ均衡解

前回の復習

		プレイヤー B	
		戦略 1	戦略 2
プレイヤー A	戦略 1	(60, 40)	(45, 55)
	戦略 2	(55, 45)	(50, 50)

- 自分の利得を相手が最小化するものとして、想定される最小の利得が最大になる戦略
… マクシミン (maxmin) 戦略
- 2人定和ゲームにおいては、マクシミン戦略に基づく解とナッシュ均衡解は一致

2人定和ゲームにおける混合戦略

2人定和ゲームにおける混合戦略

◆サッカーのPK

- キッカーの蹴った方向にゴールキーパー (GK) が飛ぶと，ゴールの確率が低くなる
- キッカーの利得はゴールの確率
- キーパーの利得はゴールされない確率

		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4

2人定和ゲームにおける混合戦略

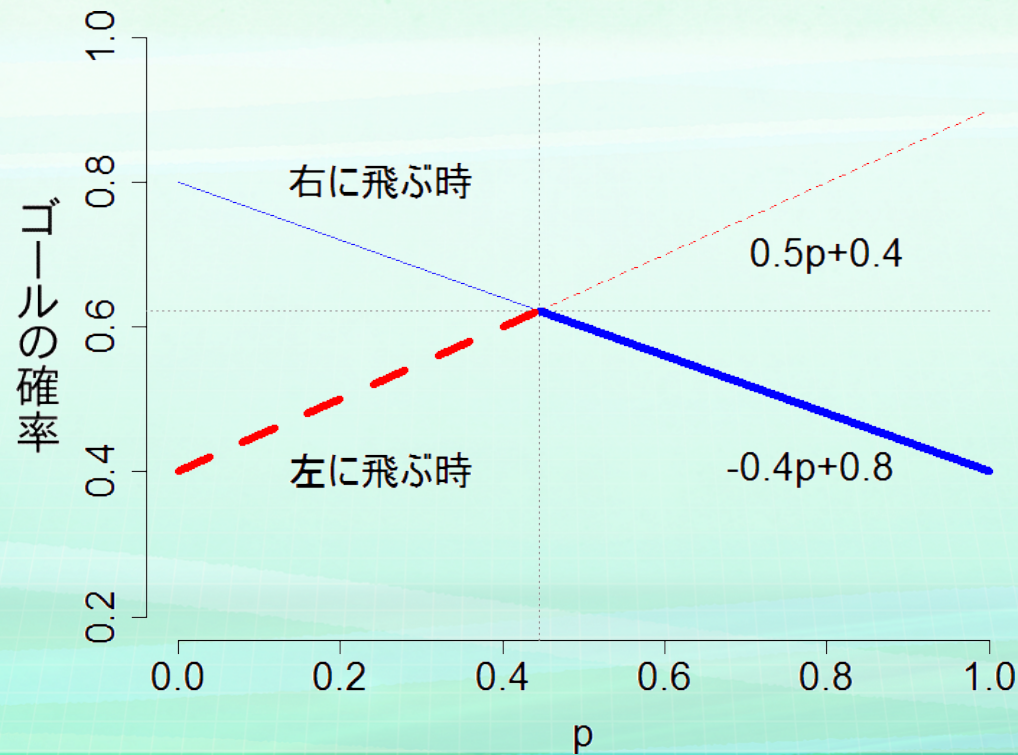
- キッカーが右に蹴る確率を p
- GKが右および左に飛んだ時のゴールの確率の期待値

$$0.4p + 0.8(1 - p) = -0.4p + 0.8$$

$$0.9p + 0.4(1 - p) = 0.5p + 0.4$$

		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4

2人定和ゲームにおける混合戦略



2人定和ゲームにおける混合戦略

- GKが右および左に飛んだ時のゴールの確率の期待値

$$0.4p + 0.8(1 - p) = -0.4p + 0.8$$

$$0.9p + 0.4(1 - p) = 0.5p + 0.4$$

のうち小さい方の値が最大になるのは、
両式の値が等しい時

$$-0.4p + 0.8 = 0.5p + 0.4 \rightarrow p = 4/9$$

- ゴールの確率の期待値は $-0.4p + 0.8 \doteq 0.62$

2人定和ゲームにおける混合戦略

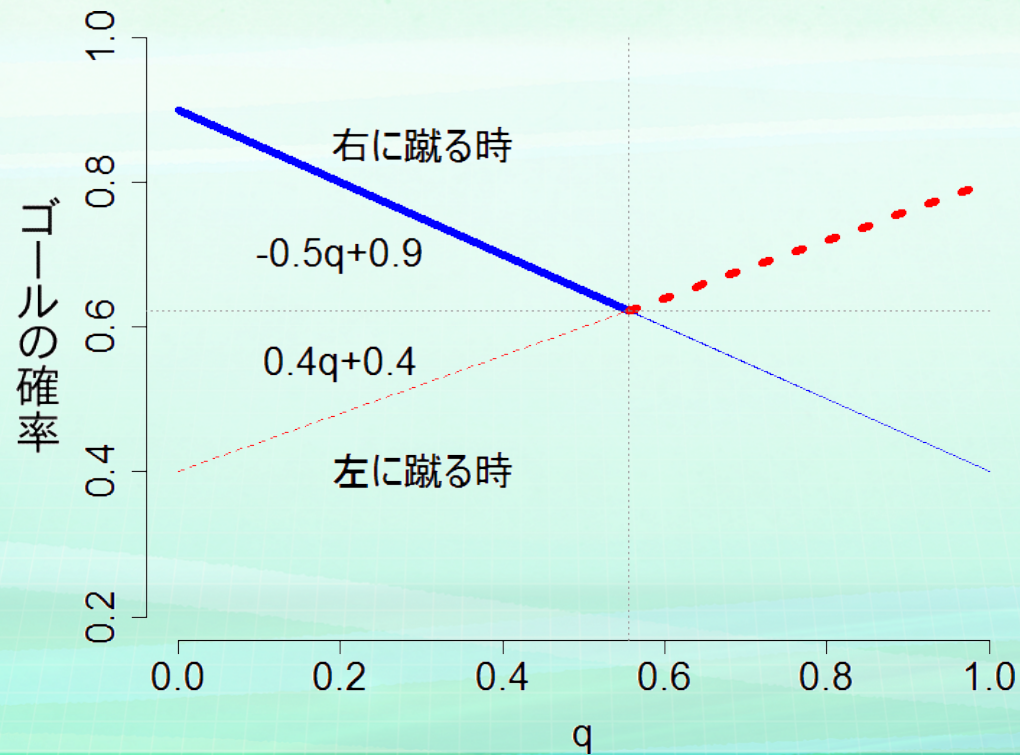
- GKが右に飛ぶ確率を q
- キッカーが右および左に蹴った時のゴールの確率の期待値

$$0.4q + 0.9(1 - q) = -0.5q + 0.9$$

$$0.8q + 0.4(1 - q) = 0.4q + 0.4$$

		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4

2人定和ゲームにおける混合戦略



2人定和ゲームにおける混合戦略

- キッカーが右および左に蹴った時のゴールの確率の期待値

$$0.4q + 0.9(1 - q) = -0.5q + 0.9$$

$$0.8q + 0.4(1 - q) = 0.4q + 0.4$$

のうち大きい方の値が最小になるのは、
両式の値が等しい時

$$-0.5q + 0.9 = 0.4q + 0.4 \rightarrow q = 5/9$$

- ゴールの確率の期待値は $-0.5q + 0.9 \rightarrow 0.62$

2人定和ゲームにおける混合戦略

◆マクシミン戦略と線形計画法

- 2人定和ゲームについて考える
- プレイヤーAは m 種類の戦略
各戦略を選択する確率分布 $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$

$$p_1, p_2, \dots, p_m \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$$

- プレイヤーBは n 種類の戦略
各戦略を選択する確率分布 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$q_1, q_2, \dots, q_n \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$$

2人定和ゲームにおける混合戦略

◆プレイヤーAから見た利得行列

プレイヤーA	プレイヤーB			
	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

2人定和ゲームにおける混合戦略

- プレイヤーAの立場から考える
- プレイヤーBが戦略 j を選択しているとき、プレイヤーAの利得の期待値は

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m$$

2人定和ゲームにおける混合戦略

- プレイヤーBが各戦略 $j = 1, 2, \dots, n$ を選択している時の、プレイヤーAの利得の期待値のうち最小値を λ とおくと、

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq \lambda$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq \lambda$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq \lambda$$

2人定和ゲームにおける混合戦略

最大化 λ

$$\text{制約 } a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq \lambda$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geq \lambda$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geq \lambda$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

$$p_1, p_2, \cdots, p_m \geq 0$$

2 人定和ゲームにおける混合戦略

最大化 λ

$$\text{制約 } a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m - \lambda \geq 0$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m - \lambda \geq 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m - \lambda \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

$$p_1, p_2, \cdots, p_m \geq 0$$

2人定和ゲームにおける混合戦略

		GK	
		右	左
キッカー	右	0.4	0.9
	左	0.8	0.4
最大化 λ			
制約		$0.4p_1 + 0.8p_2 - \lambda \geq 0$	
		$0.9p_1 + 0.4p_2 - \lambda \geq 0$	
		$p_1 + p_2 = 1$	
		$p_1, p_2 \geq 0$	

展開型ゲームと先読み推論

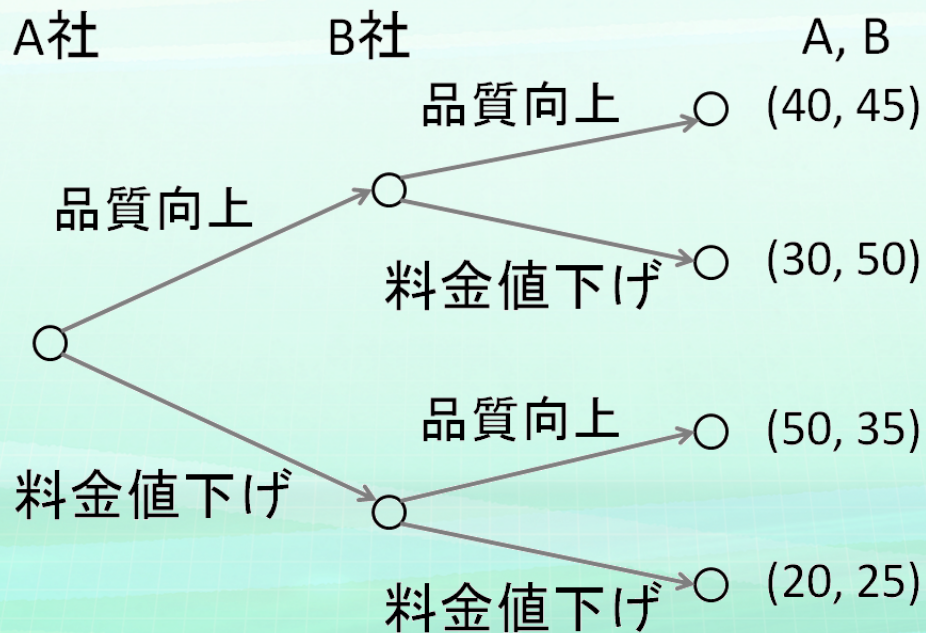
展開型ゲームと先読み推論

		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

- A社とB社が順番に行動する展開型ゲーム
- 展開型ゲームはゲームの木で表すことができる

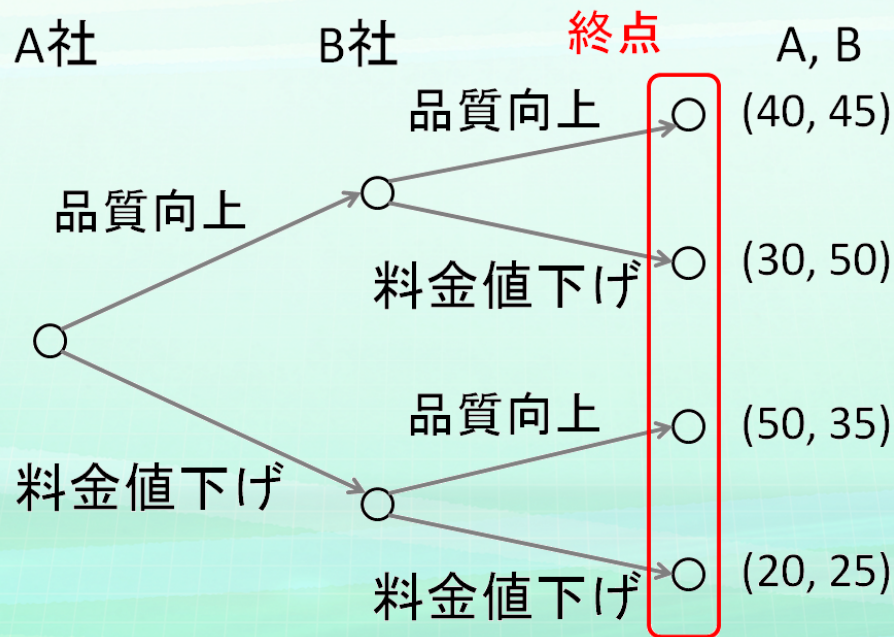
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



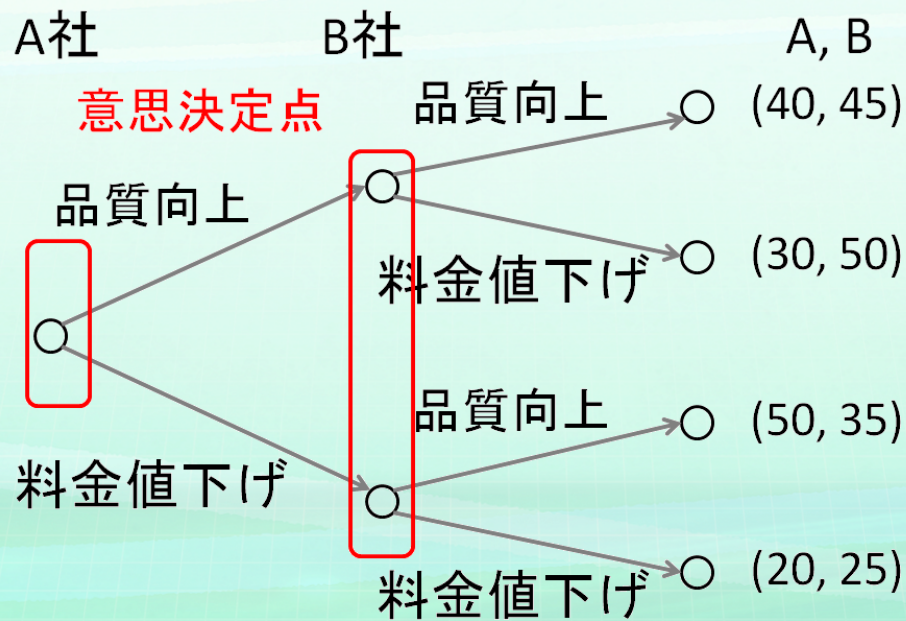
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



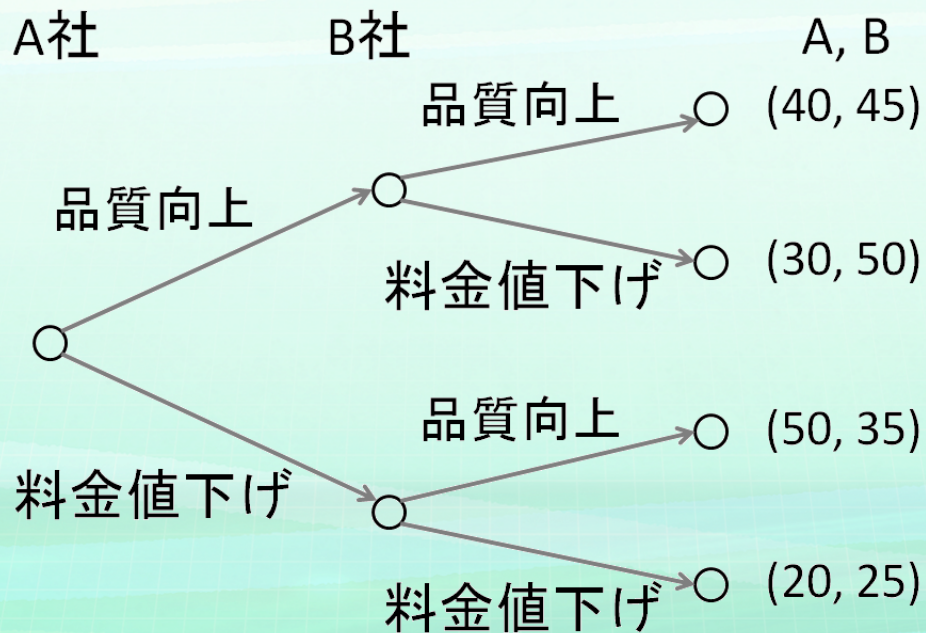
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



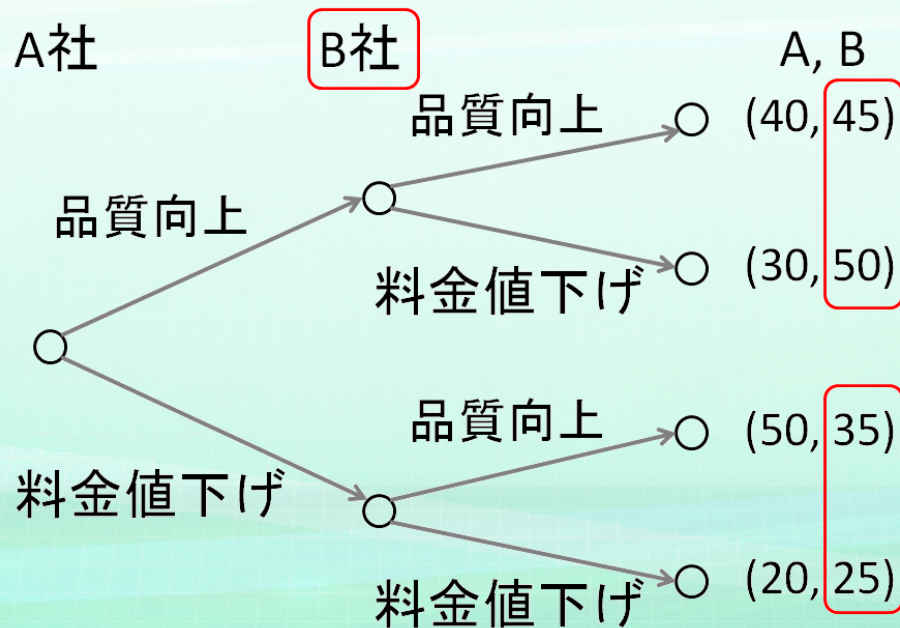
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



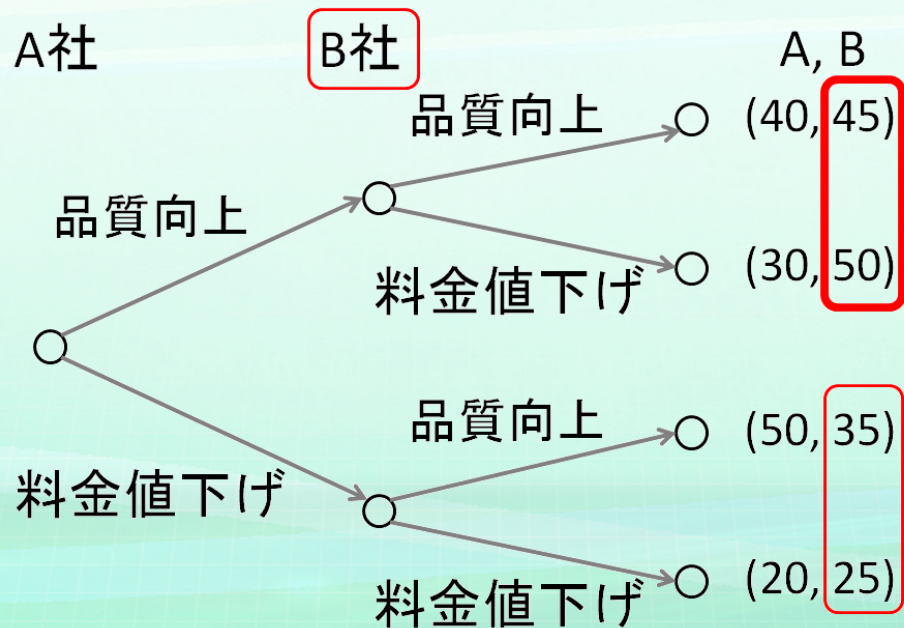
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



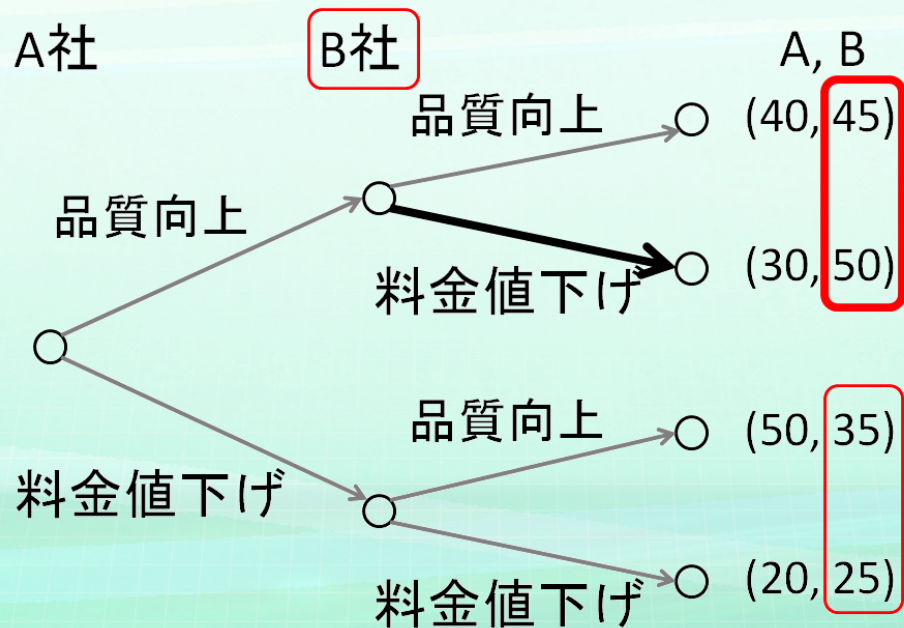
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



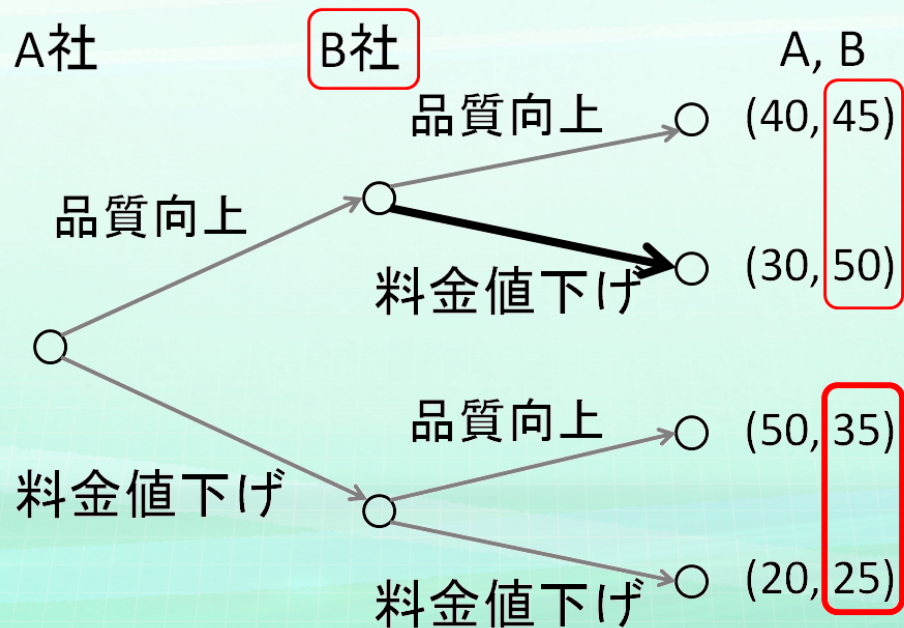
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



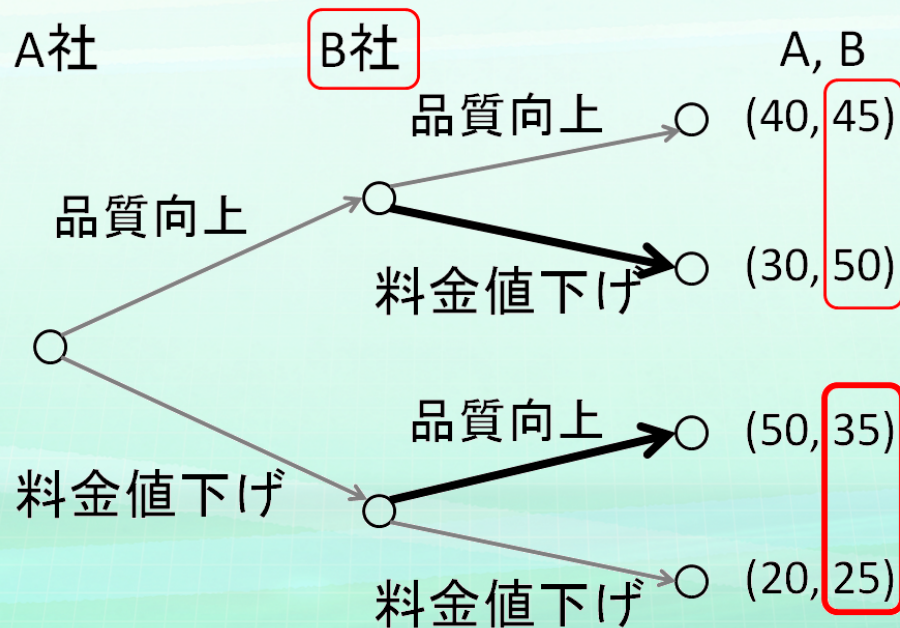
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



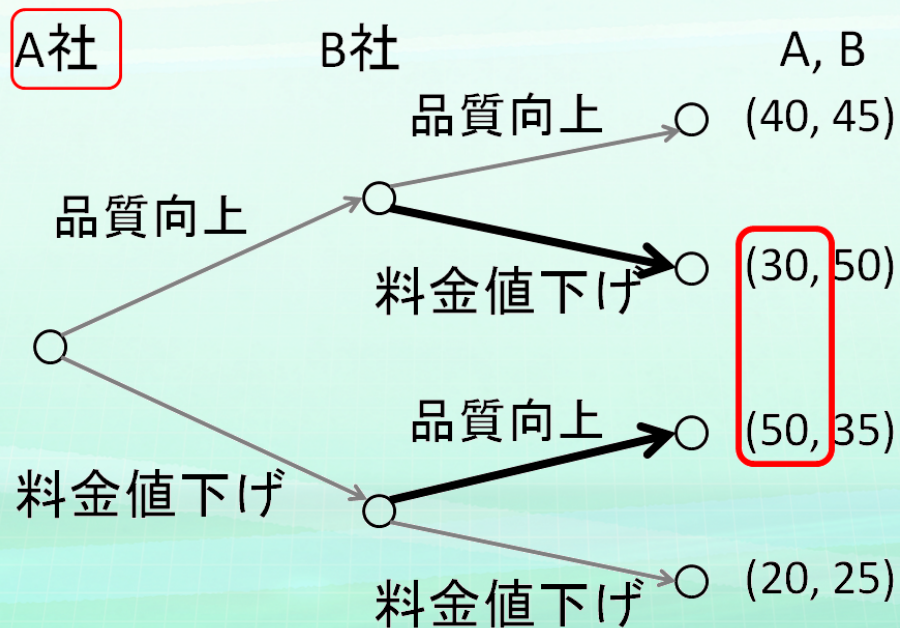
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



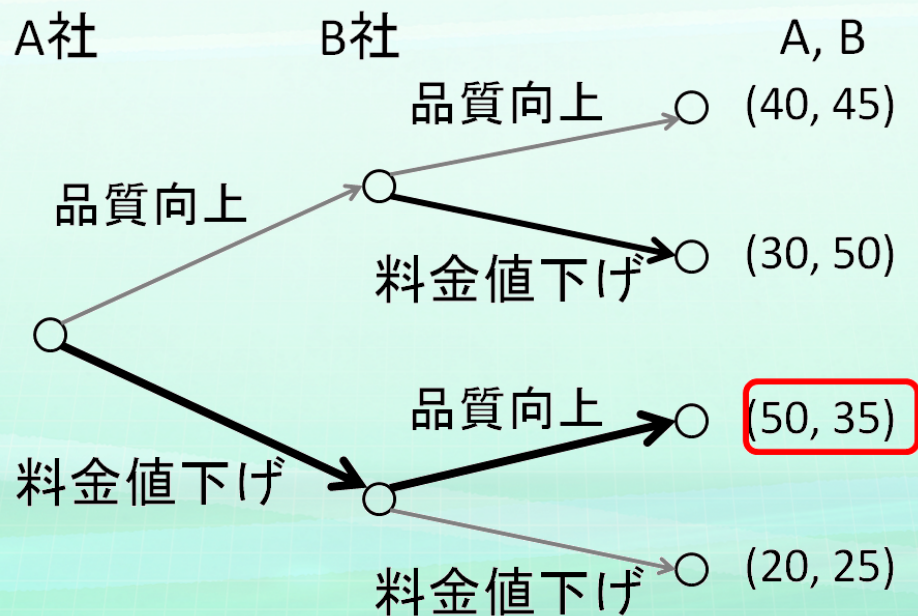
展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



展開型ゲームと先読み推論

◆ゲームの木



展開型ゲームと先読み推論

		B社	
		品質向上	料金値下げ
A社	品質向上	(40, 45)	(30, 50)
	料金値下げ	(50, 35)	(20, 25)

- 展開型のゲームの解は標準型ゲームのナッシュ均衡解（の一つ）と一致
- 最後の手番からプレイの順序とは逆に考えて解を導出する方法 … 先読み推論あるいは逆向き推論

繰り返しゲームと協調の出現

繰り返しゲームと協調の出現

◆囚人のジレンマ

		容疑者 B	
		黙秘	自白
容疑者 A	黙秘	(2年, 2年)	(10年, 釈放)
	自白	(釈放, 10年)	(5年, 5年)

繰り返しゲームと協調の出現

◆囚人のジレンマ

		容疑者 B	
		黙秘	自白
容疑者 A	黙秘	(2年, 2年)	(10年, 釈放)
	自白	(釈放, 10年)	(5年, 5年)

繰り返しゲームと協調の出現

◆囚人のジレンマ

		容疑者 B	
		黙秘	自白
容疑者 A	黙秘	(2年, 2年)	(10年, 釈放)
	自白	(釈放, 10年)	(5年, 5年)

繰り返しゲームと協調の出現

◆一般化した囚人のジレンマゲーム

プレイヤー B

プレイヤー A

	協調	裏切り
協調	(6, 6)	(1, 9)
裏切り	(9, 1)	(3, 3)

繰り返しゲームと協調の出現

◆ 2 回繰り返しゲーム

- 2回目は裏切りが支配戦略
- 1回目は2回目と独立に考えられる
→ やはり裏切りが支配戦略

◆ 有限回繰り返しゲーム

- 3回以上の有限回繰り返しゲーム
→ 裏切り続けるのが支配戦略

繰り返しゲームと協調の出現

- 毎回の利得 a
- 割引因子 δ ($0 \leq \delta < 1$)
- 無限回繰り返しゲームにおける割引利得の総和

$$a + a\delta + a\delta^2 + \cdots = \frac{a}{1 - \delta}$$

- a 円を年利 r の口座に預金
→ n 年後には $a(1 + r)^n$ 円
- n 年後に得る a 円は現在得る a 円より割り引いて考えるほうが妥当

繰り返しゲームと協調の出現

◆無限回繰り返しゲーム

- 最初は協調し，相手が協調する限り協調を続けるが，相手が一度でも裏切るとそれ以降裏切り続ける戦略
… トリガー戦略
- 両プレイヤーがトリガー戦略を選択
→ 両者は協調を続ける
割引利得の総和

$$u_{Cc} = 6 + 6\delta + 6\delta^2 + \dots = \frac{6}{1 - \delta}$$

繰り返しゲームと協調の出現

◆無限回繰り返しゲーム

- 一方がトリガー戦略，もう一方が裏切り続ける
- 裏切り続けるプレイヤーの割引利得の総和

$$u_{Dc} = 9 + 3\delta + 3\delta^2 + \dots = 9 + \frac{3\delta}{1 - \delta} = \frac{9 - 6\delta}{1 - \delta}$$

- トリガー戦略を選択したプレイヤーの割引利得の総和

$$u_{Cd} = 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \dots = 1 + \frac{3\delta}{1 - \delta} = \frac{1 + 2\delta}{1 - \delta}$$

繰り返しゲームと協調の出現

◆無限回繰り返しゲーム

- $u_{Cc} \geq u_{Dc}$ ならば、プレイヤーは裏切らず協調し続ける

$$\frac{6}{1-\delta} \geq \frac{9-6\delta}{1-\delta}$$

- $\delta \geq 1/2 \cdots$ トリガー戦略を選択
- $\delta < 1/2 \cdots$ 裏切り戦略を選択

オークション

オークション

- 魚市場やオークションハウスで行われる、
価格が競り上がっていくオークション
… イングリッシュオークション
- バナナの叩き売りや花市場で行われる、
価格が下がっていくオークション
… ダッチオークション
- 公開オークション / 封印入札
- ファーストプライス・オークション
/ セカンドプライス・オークション

オークション

◆セカンドプライス・オークション

- 封印入札とする
- 最高額入札者が落札
- 2番目の入札額で購入
- 自分は財を v_A と評価し，入札額 x_{A*} で入札
- 他に最高額をつけている相手の入札額 x_B

オークション

◆セカンドプライス・オークション

$x_{AL} < v_A$ の時

$x_B < x_{AL}$: 自分が落札し, x_B で購入
→ 利得 $v_A - x_B$

$x_{AL} < x_B < v_A$: 相手が落札
→ 利得 0

$x_{AL} < v_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆セカンドプライス・オークション

$x_A = v_A$ の時

$x_B < x_A = v_A$: 自分が落札し, x_B で購入
→ 利得 $v_A - x_B$

$x_A = v_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆セカンドプライス・オークション

$x_{AH} > v_A$ の時

$x_B < v_A < x_{AH}$: 自分が落札し, x_B で購入
→ 利得 $v_A - x_B$

$v_A < x_B < x_{AH}$: 自分が落札
→ 利得 $-(x_B - v_A)$

$x_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆セカンドプライス・オークション

$x_B \setminus x_{A*}$	$x_{AL}(< v_A)$	v_A	$x_{AH}(> v_A)$
$x_B < x_{AL} < v_A$	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$
$x_{AL} < x_B < v_A$	0	$v_A - x_B$	$v_A - x_B$
$v_A < x_B < x_{AH}$	0	0	$-(x_B - v_A)$
$v_A < x_{AH} < x_B$	0	0	0

オークション

◆イングリッシュ・オークション

- 公開入札とする
- 最高額入札者が落札
- 1番目(落札者)の入札額で売買
- 自分は財を v_A と評価し, 入札を降りる額 x_{A*}
- 最高額で降りる相手の入札額 x_B

オークション

◆イングリッシュ・オークション

$x_{AL} < v_A$ の時

$x_B < x_{AL}$: 自分が落札し, $x_B + \Delta$ で購入
→ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$x_{AL} < x_B < v_A$: 相手が落札
→ 利得 0

$x_{AL} < v_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆イングリッシュ・オークション

$x_A = v_A$ の時

$x_B < x_A = v_A$: 自分が落札し, $x_B + \Delta$ で購入
→ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$x_A = v_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆イングリッシュ・オークション

$x_{AH} > v_A$ の時

$x_B < v_A < x_{AH}$: 自分が落札し, $x_B + \Delta$ で購入
→ 利得 $v_A - x_B - \Delta$

$v_A < x_B < x_{AH}$: 自分が落札
→ 利得 $-(x_B - v_A) - \Delta$

$x_A < x_B$: 相手が落札
→ 利得 0

オークション

◆イングリッシュ・オークション

$x_B \setminus x_{A*}$	$x_{AL}(< v_A)$	v_A	$x_{AH}(> v_A)$
$x_B < x_{AL} < v_A$	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$
$x_{AL} < x_B < v_A$	0	$v_A - x_B - \Delta$	$v_A - x_B - \Delta$
$v_A < x_B < x_{AH}$	0	0	$-(x_B - v_A) - \Delta$
$v_A < x_{AH} < x_B$	0	0	0