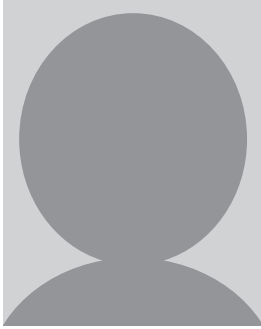
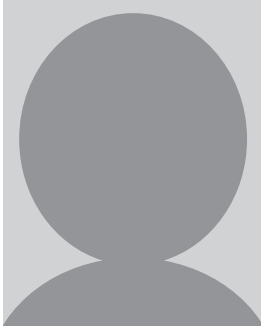


問題解決の数理（' 1 7）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.



- 今回の講義では，統計的意思決定についてお話しします．
- 現実世界では，多くの場合，決定に関わる状況に不確実性が伴います．
- 例えば，天候や株価の変動は，ある程度の予測はできますが，完全に不確実性を取り除くことはできず，意思決定者がコントロールできるものでもありません．
- そのような不確実性が伴う状況で，合理的に決定を行うには，統計的なアプローチが有効であると考えられます．



- そこで、今回は、期待効用の最大化に基づく意思決定についてお話しします。
- 期待効用最大化に基づく決定とは、結果の評価値である効用の期待値が最大になるような行動や代替案の選択をするという、単純な決定原理で、計算も簡単です。
- しかし、期待効用最大化に基づく決定は広い適用範囲を持ちます。
- それではさっそく、最初の例を考えてみましょう。
-

期待効用に基づく決定

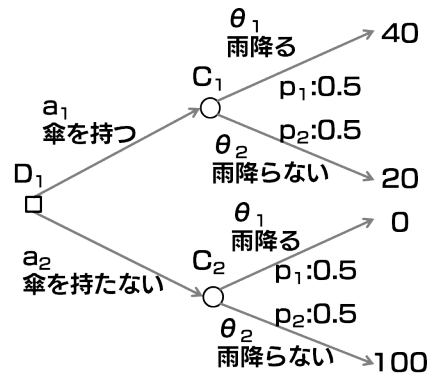
雨の日の外出

- 雨が降る確率は 0.5
- 傘を持って外出，雨が降った … 効用は 40
- 傘を持って外出，雨が降らなかった … 効用は 20
- 傘を持たずに外出，雨が降った … 効用は 0
- 傘を持たずに外出，雨が降らなかった … 効用は 100
- 傘を持って外出するべきか？

- 外出時に傘を持って行くかという簡単な意思決定問題です.
- 雨が降る確率は 0.5 とします.
- 傘を持って外出して，雨が降った場合の嬉しさ，効用と呼びますが，この時の効用を 40 とします.
- 傘を持って外出して，雨が降らなかった場合の効用は 20 とします.
- 傘を持たずに外出して，雨が降った場合，…，これは多くの人にとって最悪のケースですね. この場合の効用は 0 とします.
- 傘を持たずに外出して，雨が降らなかった場合の効用は 100 とします.
- この場合，傘を持って行くべきか，持たないべきかという意思決定をおこないます.

期待効用に基づく決定

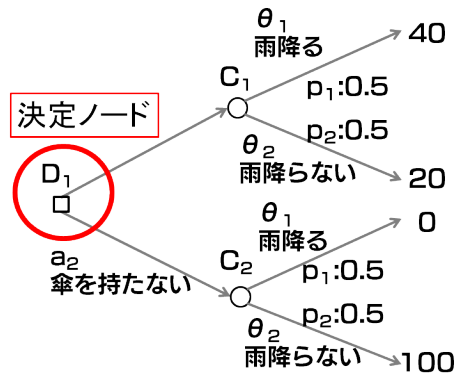
決定木



- このような意思決定問題を表現するツールとして，ここに示す決定木，があります．
- 決定木はディシジョントゥリーとも呼ばれます．
- 展開型ゲームを表すゲームの木と似ていますが，実際に共通点が多くあります．
- なお，機械学習やデータマイニングの分野で，分類ルールを発見する決定木と呼ばれる手法がありますが，これは全くの別物です．

期待効用に基づく決定

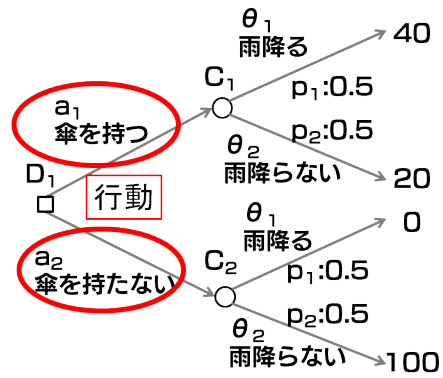
決定木



- 決定木の構成要素は次のようになります。
- まず、四角い点で表わされるのは、決定ノードと呼ばれます。
- 決定ノードはゲームの木の意思決定点に相当します。

期待効用に基づく決定

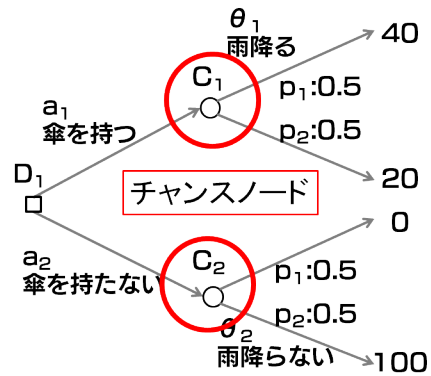
決定木



- すなわち，プレイヤーがどの戦略を選択するか，言い換えればどのように行動するかを決定する点です。

期待効用に基づく決定

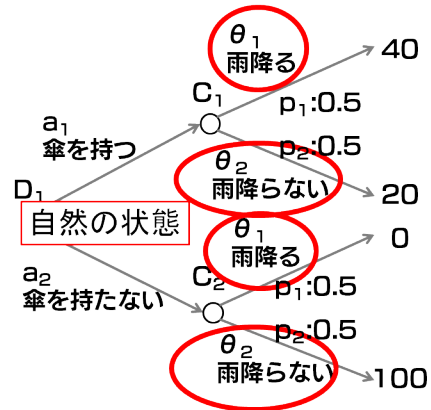
決定木



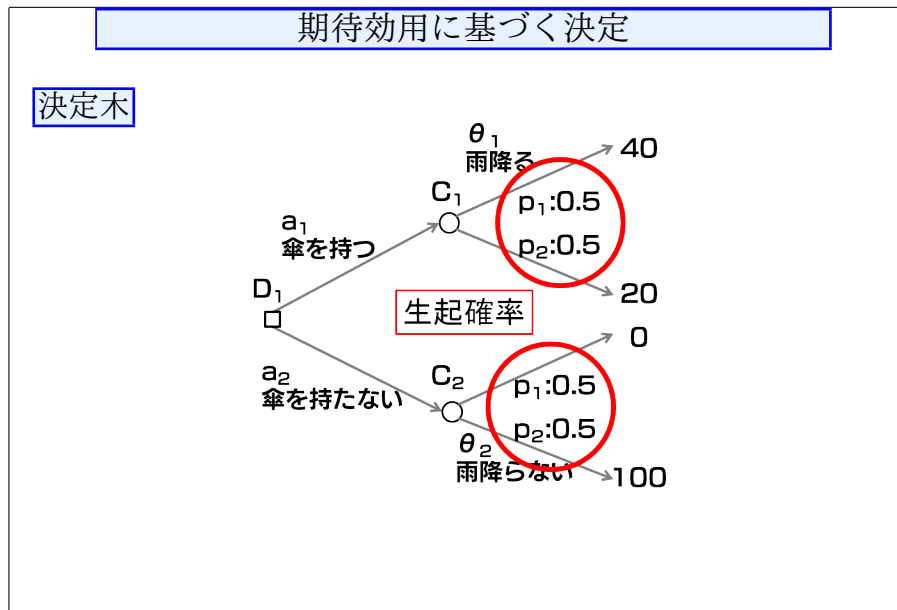
- 丸で表わされる点は，チャンスノードと呼ばれます。
- この点において，どの事象が生じるかが決まりますが，チャンスノードでは意思決定者の意思決定や努力とは無関係に生じる事象が決まります。
- すなわち，チャンスノードでは，天候のように意思決定者がコントロールができない，事象の決定が行われます。

期待効用に基づく決定

決定木



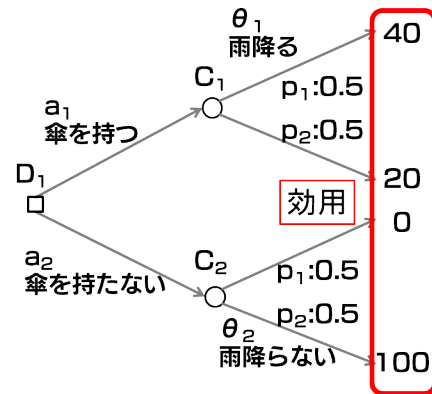
- 結果として生じる事象は自然の状態と呼ばれます。
- 天候のように、意思決定者がコントロールができなく、ゲーム理論における相手のプレイヤーのように特定の意図を持たない決定ゆえ、自然の状態と呼ばれます。
- こういったことから、ここで扱う意思決定問題は、自然相手のゲームと呼ばれることがあります。



- 事象，すなわち自然の状態は，確率的に生じます．
- 特定の自然の状態が生じる生起確率は，自然の状態と同様に枝に表現されます．

期待効用に基づく決定

決定木



- ゲームの木における終点に相当する点には，特定の行動をとった上で生じた事象，すなわち結果に対する評価である効用が表わされます。

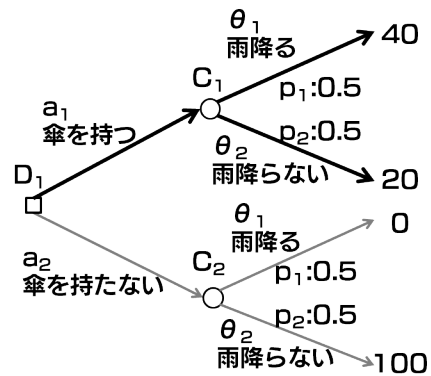
期待効用に基づく決定

期待効用に基づく決定

- 効用の期待値 … 期待効用
- 特定の行動に対し，生ずる結果の確率で結果の効用を重み付けした和
- 期待効用が最大になる行動をとる

- 今回取り上げるのは，期待効用の最大化に基づく決定です.
- 期待効用とは，特定の結果の効用に，その結果が生じる確率で重み付けした和，言い換えれば効用の期待値のことです.
- 意思決定者が，特定の行動をとった時の期待効用を比較し，期待効用が最大になる行動を採択するというものです.
- それでは，外出の問題に関して，期待効用を求めてみましょう.

期待効用に基づく決定



- まず，意思決定者が傘を持って行くと決定したとします.
- 雨が降る確率は 0.5 です.
- 傘を持って外出し，雨が降った時の効用は 40 です.
- 傘を持って外出し，雨が降らなかった時の効用は 20 です.

期待効用に基づく決定

傘を持って外出した場合… a_1

- 確率 $p_1 = P(\theta_1) = 0.5$ で雨が降る (θ_1)
- 雨が降る (θ_1) 時の効用 $u(a_1, \theta_1)$ は 40
- 確率 $p_2 = P(\theta_2) = 0.5$ で雨は降らない (θ_2)
- 雨が降らない (θ_2) 時の効用 $u(a_1, \theta_2)$ は 20
- 傘を持って外出した場合の期待効用は

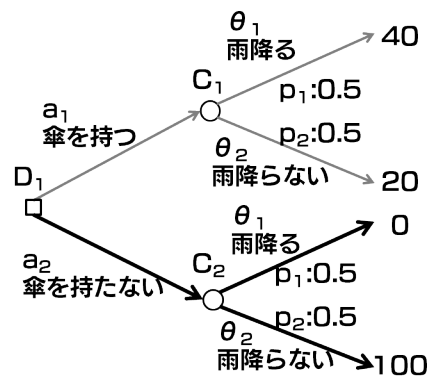
$$p(\theta_1)u(a_1, \theta_1) + p(\theta_2)u(a_1, \theta_2) = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 20 = 30$$

- 以上のことから、傘を持って外出した時の期待効用は、

$$0.5 \times 40 + 0.5 \times 20 = 30$$

となります。

期待効用に基づく決定



- 今度は，意思決定者が傘を持って行かないと決定したとします.
- 雨が降る確率は 0.5 です.
- 傘を持たずに外出し，雨が降った時の効用は 0 です.
- 傘を持たずに外出し，雨が降らなかった時の効用は 100 です.

期待効用に基づく決定

傘を持たずに外出した場合… a_2

- 確率 $p_1 = P(\theta_1) = 0.5$ で雨が降る (θ_1)
- 雨が降る (θ_1) 時の効用 $u(a_2, \theta_1)$ は 0
- 確率 $p_2 = P(\theta_2) = 0.5$ で雨は降らない (θ_2)
- 雨が降らない (θ_2) 時の効用 $u(a_2, \theta_2)$ は 100
- 傘を持たずに外出した場合の期待効用は

$$p(\theta_1)u(a_2, \theta_1) + p(\theta_2)u(a_2, \theta_2) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 100 = 50$$

- 以上のことから、傘を持たずに外出した時の期待効用は、

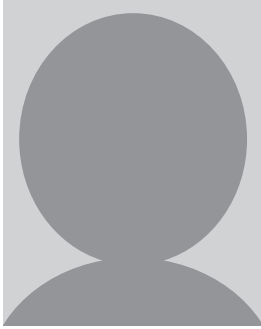
$$0.5 \times 0 + 0.5 \times 100 = 50$$

となります。

期待効用に基づく決定

- 傘を持って外出した時の期待効用 … 30
- 傘を持たずに外出した時の期待効用 … 50
- 傘を持たずに外出すべき

- 以上のことをまとめますと,
- 傘を持って外出した時の期待効用は 30 で,
- 傘を持たずに外出した時の期待効用は 50 で,
- 傘を持たずに外出した方が, 期待効用が大きいことから, この場合, 傘を持たずに外出するべきである, ということになります.



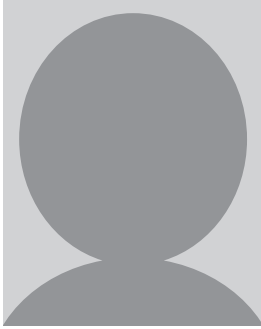
- 意思決定問題を表現する決定木と期待効用に基づく統計的決定について，例を用いて説明しました．
- この例は単純すぎて，決定木を持ち出す意義があまり感じられなかったかもしれません．
- 次は，もう少し複雑な例を示します．
-

期待効用に基づく決定

多段階決定問題

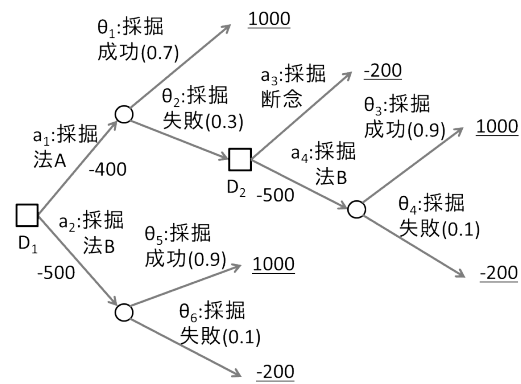
- 資源の採掘に成功したら 1000 億円の収入
- 資源の採掘を断念したら 200 億円のペナルティ
- 採掘法 A は 400 億円のコストがかかり，成功率 0.7
- 採掘法 B は 500 億円のコストがかかり，成功率 0.9
- 採掘法 A に失敗してから採掘法 B で再挑戦可

- 今度は，次の問題を考えます.
- 資源の採掘に成功したら，1000 億円の収入を得ます.
- しかし，資源の採掘を断念したら，200 億円のペナルティを支払わなければなりません.
- 採掘法 A は 400 億円のコストがかかり，採掘成功の確率は 0.7 です.
- 採掘法 B は 500 億円のコストがかかりますが，採掘成功の確率は 0.9 です.
- 採掘法 A で失敗してから採掘法 B で再挑戦することもできます.



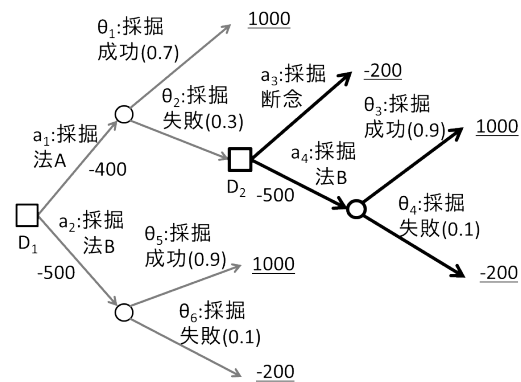
- しかし，採掘法 A で失敗して，採掘法 A で再挑戦したり，採掘法 B で失敗して，採掘法 A ないしは採掘法 B で再挑戦しても，採掘は成功しません．
- このような条件の下で，どのような採掘を行えば良いかという問題です．

期待効用に基づく決定



- この問題の決定木はこのようになります。
- 決定ノードが2個あり、先ほどの例より複雑になっています。
- このように多段階の決定を含む問題を解くには、展開型ゲームを先読み推論で解くのと同様に、末尾から逆向きに解いていきます。
- この問題では、決定ノード D_2 から考えます。

期待効用に基づく決定



- 決定ノード D_2 には、採掘法 A で採掘に失敗した結果至りますが、そこまでの経過を気にする必要はありません。
- 決定ノード D_2 において、意思決定者は、採掘を断念するか採掘法 B で再挑戦するか選択します。
- 採掘を断念すれば、200 億円のペナルティを支払わなくてはなりません。
- 採掘法 B で再挑戦すれば、さらに 500 億円のコストがかかりますが、採掘は確率 0.9 で成功し、1000 億円の収入を得ます。
- 採掘法 B で再挑戦しても確率 0.1 で失敗します。
- その場合、500 億円のコストに加え、ペナルティの 200 億円を支払うことになります。
-

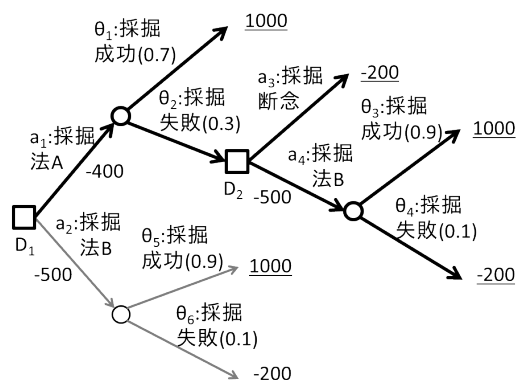
期待効用に基づく決定

D_2

- 採掘断念 (a_3) $\cdots -200$
- 採掘法 B(a_4)
 - 採掘成功 (θ_3) $\cdots -500 + 1000 = 500$
 - 採掘失敗 (θ_4) $\cdots -500 - 200 = -700$
 - 成功確率 0.9
$$0.9 \times 500 + 0.1 \times (-700) = 380$$
- 採掘法 A に失敗したら、採掘法 B で再挑戦すべき

- 以上をまとめますと、決定ノード D_2 において、採掘を断念すれば、200 億円の損失になります。
- 採掘法 B で再挑戦し、採掘に成功すれば 500 億円のコストを支払い、1000 億円の収入を得ますので、500 億円の利益になります。
- 採掘法 B で再挑戦し、採掘に失敗すれば 500 億円のコストを支払い、さらに 200 億円のペナルティを支払いますので、700 億円の損失になります。
- 採掘法 B での採掘成功の確率は 0.9 です。
- したがって、収支の金額を効用すると、採掘法 B で再挑戦した時の期待効用は、 $0.9 \times 500 + 0.1 \times (-700) = 380$ となります。
- 採掘を断念した時の効用は -200 ですから、採掘法 B で再挑戦すべきということになります。
- 次に、決定ノード D_1 について考えます。

期待効用に基づく決定



- 決定ノード D_1 において、意思決定者は、採掘法 A で採掘するか、採掘法 B で採掘するか選択します。
- まず、採掘法 A で採掘する場合を考えます。
- 採掘法 A で採掘すれば、400 億円のコストがかかりますが、採掘は確率 0.7 で成功し、1000 億円の収入を得ます。
- 採掘法 A での採掘は確率 0.3 で失敗しますが、採掘法 B で再チャレンジすれば期待値で 380 億円の利益が得られます。

期待効用に基づく決定

D_1 で採掘法 A(a_1)

- 採掘成功 (θ_1) $\cdots -400 + 1000 = 600$
- 採掘失敗 (θ_2) $\cdots -400 + 380 = -20$
- 成功確率 0.7

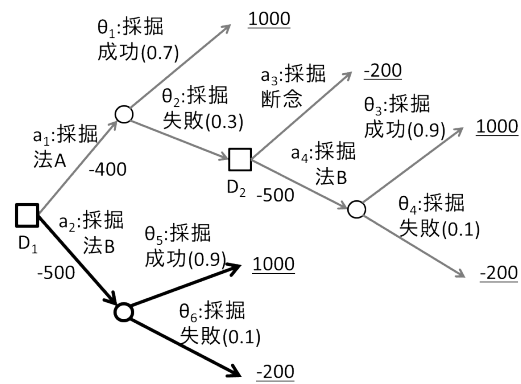
$$0.7 \times 600 + 0.3 \times (-20) = 414$$

- 以上をまとめますと，決定ノード D_1 において，採掘法 A で採掘した場合，
- 採掘に成功すれば 400 億円のコストを支払い，1000 億円の収入を得ますので，600 億円の利益になります．
- 採掘に失敗し，採掘法 B で再挑戦した場合，最初の採掘法 A で 400 億円のコストを支払い，採掘法 B での再挑戦で期待値で 380 億円の収入を得ますので，期待値で 20 億円の損失になります．
- 採掘法 A での採掘成功の確率は 0.7 です．
- したがって，収支の金額を効用すると，最初に採掘法 A で採掘した場合の期待効用は，

$$0.7 \times 600 + 0.3 \times (-20) = 414$$

となります．

期待効用に基づく決定



- 次に，決定ノード D_1 において，採掘法 B で採掘する場合を考えます．
- 採掘法 B で採掘すれば，500 億円のコストがかかりますが，採掘は確率 0.9 で成功し，1000 億円の収入を得ます．
- 採掘は確率 0.1 で失敗し，その時はさらにペナルティとして 200 億円支払います．

期待効用に基づく決定

D_1 で採掘法 B(a_2)

- 採掘成功 (θ_5) $\cdots -500 + 1000 = 500$
- 採掘失敗 (θ_6) $\cdots -500 - 200 = -700$
- 成功確率 0.9

$$0.9 \times 500 + 0.1 \times (-700) = 380$$

- 以上をまとめますと，決定ノード D_1 において，採掘法 B で採掘を行う場合，採掘に成功すれば 500 億円のコストを支払い，1000 億円の収入を得ますので，500 億円の利益になります．
- 採掘に失敗すれば 500 億円のコストを支払い，さらに 200 億円のペナルティを支払いますので，700 億円の損失になります．
- 採掘法 B での採掘成功の確率は 0.9 です．
- したがって，収支の金額を効用すると，採掘法 B で採掘した時の期待効用は，

$$0.9 \times 500 + 0.1 \times (-700) = 380$$

となります．

期待効用に基づく決定

期待効用

- 採掘法 A, 失敗したら採掘法 B で再挑戦
($a_1 \rightarrow a_4$) $\cdots$ 414
- 最初から採掘法 B (a_2) $\cdots$ 380
- 最初に採掘法 A(a_1) を選択し、失敗したら
採掘法 B (a_4) で再挑戦を選択すべき

- 結局, 決定ノード D_1 において, まず採掘法 A, 失敗したら採掘法 B 法で再挑戦した場合, 期待効用は 414 億円.
- 最初から、採掘法 B で採掘した場合、期待効用は 380 億円となり、「最初に採掘法 A で採掘し、失敗したら採掘法 B で再挑戦すべき」ということになります.



- このように，多段階の決定も，決定木を末尾から逆向きに解いていくことにより，最適な決定を行うことができます．

期待効用最大化原理



- 先ほどは，期待効用を最大化する決定を最適な決定としました．
- 期待効用を最大にする決定が，それなりに良い決定であることは良いとしても，最適な決定であるかということは自明ではありません．
- 期待効用を最大化する決定が最適な決定となるには，満たすべき前提条件があります．
- ここでは，まずその前提条件を示します．



- 数学的に深入りはしませんので，これから挙げる各前提条件は素直に受け入れられるものか，疑問の余地があるか，軽く考えてみて下さい.
-

期待効用最大化原理

結果

- 行動 a を選択し，状態 θ が生じた結果 $y = (a, \theta)$

前提 1：多様性公理

- 行動と状態は各々2種類以上存在
- 結果の集合は4つ以上の異なる結果を含む

- 行動 a を選択し，状態 θ が生じた時， a と θ の組 y ，あるいは a と θ の関数 y を結果と呼びます。
- まず，最初の前提ですが，行動と状態は各々2種類以上存在する，すなわち結果は $2 \times 2 = 4$ 種類以上存在するというものです。
- この前提は多様性公理と呼ばれます。

期待効用最大化原理

くじ

- 確率 p で結果 y_1 , 確率 $1 - p$ で結果 y_2 が起こるくじ

$$(y_1 : p, y_2 : 1 - p)$$

- くじ $L_1 = (y_1 : p_1, y_2 : 1 - p_1)$ が確率 q で起こり,
 $L_2 = (y_3 : p_2, y_4 : 1 - p_2)$ が確率 $1 - q$ で起こる
 複合的くじ

$$(L_1 : q, L_2 : 1 - q)$$

- 次に, 「くじ」という概念を導入します.
- 確率 p で結果 y_1 , 確率 $1 - p$ で結果 y_2 が起こるという, 確率的で複合的な事象を「くじ」と呼び, $(y_1 : p, y_2 : 1 - p)$ のように, 結果とその生起確率を組にして並べて表現します.
- さらに, くじ L_1 が確率 q で起こり, くじ L_2 が確率 $1 - q$ で起こるという複合的な「くじ」というものも考えます.
- L_1 や L_2 といった「くじ」は結果と同様に扱い, 下の式のように表わすします.

期待効用最大化原理

くじ

- くじ $L_1 = (y_1 : p_1, y_2 : 1 - p_1)$ が確率 q で起こり,
 $L_2 = (y_3 : p_2, y_4 : 1 - p_2)$ が確率 $1 - q$ でおこる
 複合的くじ

$$(L_1 : q, L_2 : 1 - q)$$

$$(y_1 : p_1 q, y_2 : (1 - p_1) q, y_3 : p_2 (1 - q), y_4 : (1 - p_2) (1 - q))$$
- n 種類の結果が起こるくじ

$$(y_1 : p_1, y_2 : p_2, \dots, y_n : p_n)$$

- この場合, 4 種類の結果が含まれるので, 4 種類の結果とその生起確率を並べて書くことができます.
- 同様に, n 種類の結果が起こるくじでは, n 種類の結果とその生起確率を並べて書くことができます.

期待効用最大化原理

選好

$x \succeq y$	y が x より好ましくはない
$x \sim y$	$x \succeq y$ かつ $y \succeq x \cdots$ 無差別
$x \succ y$	$x \succeq y$ であって $y \succeq x$ でない
	$x \succeq y$ であって $x \sim y$ でない

- 結果や「くじ」に関して，選好，すなわち好ましさの記号を導入します．
- 選好の記号は，数における不等号を曲線にしたような形をしていますが，意味に関しても，数における大小とアナロジーが成り立ちます．
- 最初の記号は， y は x より好ましくはない…というのは，まどろっこしい表現ですが， x は y と同等か，より好ましいということを意味します．
- 2 番目の記号は， x は y と同等か，より好ましく，かつ y は x と同等か，より好ましいことを表わしています．
- 数における大小関係で言えば，等号に相当する関係で， x と y は無差別であるといいます．
- x と y は同等に好ましいという関係です．
- 3 番目の記号は，数における等号なしの不等号に相当し， x は y より好ましいということを意味します．

期待効用最大化原理

前提2：弱順序公理

すべての結果やくじ x, y, z に対して次が成り立つ.

反射律 $x \sim x$

推移律 $x \succeq y, y \succeq z$ ならば $x \succeq z$

完備性 $x \succeq y$ または $y \succeq x$ の少なくとも一方が成り立つ

- すべての結果やくじ x, y, z に対して次の三つのことが成り立つことを前提とします.
- 一つ目は、反射律と呼ばれる性質で、 x と x は無差別であるというものです.
- 二つ目は、推移律と呼ばれる性質で、 x が y より好ましく、 y が z より好ましいければ、 x は z より好ましいという性質です.
- 所謂三すくみの関係、循環は生じないということです.
- 三つ目は、完備性と呼ばれる性質で、 x と y のうち、どちらかがより好ましい、あるいは無差別のいずれかが成り立つという性質です.
- これらをまとめて、弱順序公理と呼びます.

期待効用最大化原理

前提3：連続性公理

x, y, z の間に $x \succ y \succ z$ が成り立つならば,

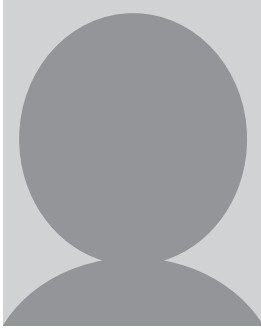
$$(x : p, z : 1 - p) \sim y$$

を満たす $0 < p < 1$ が存在する

- また、すべての結果やくじ x, y, z の間に、 x は y より好ましく、 y は z より好ましいという関係が成り立つなら、確率 p で x 、確率 $1 - p$ で z となるくじと y が無差別になるような、0 より大きく 1 より小さな数 p が存在することを前提とします。
- 例えば、 x は 100 円もらえる、 y は 50 円もらえる、 z は何ももらえないとします。
- この時、 x は y より好ましく、 y は z より好ましい訳ですが、確率 0.01 で 100 円もらえて、確率 0.99 で何ももらえないくじと、確実に 50 円もらえる権利のどちらがより好ましいでしょうか？



- おそらく、多くの方が確実に 50 円もらえるくじの方がより好ましいと判断するかと思います。
- では、確率 0.99 で 100 円もらえて、確率 0.01 で何ももらえないくじと、確実に 50 円もらえる権利のどちらがより好ましいでしょうか？
- 今度は、多くの方が、確率 0.99 で 100 円もらえるくじをより好ましいと判断するかと思います。



- 100 円をもらえる確率を適当に調整すれば，確実に 50 円もらえるくじと無差別にできる，ということを要請するのが，この前提です．
- この前提は連続性公理と呼ばれます．
- 連続性の公理は，効用関数が，結果やくじの集合から実数の集合への写像となるための要請です．

期待効用最大化原理

前提4：独立人公理

$x \sim y$ ならば、任意の z と任意の $0 \leq p \leq 1$ に対して、

$$(x : p, z : 1 - p) \sim (y : p, z : 1 - p)$$

が成り立つ

- 最後の前提は、独立人公理と呼ばれるもので、 x と y が無差別であるなら、任意の z と 0 以上 1 以下の任意の p に対して、確率 p で x 、確率 $1 - p$ で z となるくじと、確率 p で y 、確率 $1 - p$ で z となるくじは無差別になるということです。
- つまり、 x と y の選好関係は、 z や p とは無関係に決まるということです。

期待効用最大化原理

前提 1 ～ 4 を満たす時

- 任意の結果 x, y に対し

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$$

を満たす効用関数 u が一意に定まる

- くじ

$$L = (y_1 : p_1, y_2 : p_2, \dots, y_n : p_n)$$

の効用は

$$p_1 u(y_1) + p_2 u(y_2) + \dots + p_n u(y_n)$$

- 以上の、前提 1 から 4 を満たす時、任意の結果 x, y に対し、 x が y と同等以上に好ましければ、 $u(x) \geq u(y)$ であり、逆に $u(x) \geq u(y)$ であれば、 x は y と同等以上に好ましくなるという、効用関数 u が実質的に一意に定まるということが、数学的に導かれます。
- また、くじの効用は、各結果の効用に結果の生起確率をかけて加えたもの、すなわち期待効用になることも導かれます。
- これらの性質は、「矛盾のない整合的な決定を行うのなら、期待効用を最大化する決定を行う必要がある」ということを示しています。
- 数学的な導出に興味のある方は参考文献をご覧ください。



- これらの公理に，特別おかしなところはないと思われるのですが，人間が行う決定が期待効用最大化に従わないという例が数多く報告されています．
- だからこそ，期待効用最大化に基づく意思決定支援が重要であるという考え方も，4つの前提の妥当性に問題があるという考え方もあり，それぞれの考え方に基づいた研究が行われています．
- また，期待効用最大化を巡る問題は，心理学や行動経済学で盛んに研究が行われていますので，興味のある方は調べてみるといいでしょう．

期待効用最大化原理

主観確率

- 繰り返しのない事象の生起確率
 - － 生起頻度から得られない
 - － 主観的な判断に基づく … 主観確率
- 確率の公理を満たせば確率

- 今度は結果の生起確率に注目します。
- 先ほど例に挙げた，雨が降る確率とか，採掘が成功する確率というのは，繰り返しのない事象です。
- 雨が降る確率なら，類似した状況での降雨の頻度情報などを集めることはできますが，同一の状況は繰り返し起こりませんし，客観データに基づいても，最終的には気象予報士の判断，あるいは意思決定者の判断…に基づきます。
- これは，サイコロの1の目が出る確率のように，頻度に基づいて定められた，客観的に定まる確率ではありません。
- このような頻度に基づかない主観的な確率を主観確率と呼びます。
- 意思決定において，結果の生起確率は，多くの場合，主観的なものです。
- 主観に基づくと言っても，確率の満たすべき条件，すなわち確率の公理を満たす必要があります。
- 確率の公理とは次のようなものです。

期待効用最大化原理

n 個の事象 $E_1, E_2, \dots, E_n$ に関して,

- 必ず起こる事象 (全事象) を Ω とすると,

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$$

- 事象 E に対して実数 $P(E)$ を対応させる関数で,

1. 任意の事象 E に対して, $P(E) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $E_i \cap E_j = \phi$ ($i \neq j$) であれば

$$P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j)$$

- n 個の事象 E_1 から E_n に関して, 必ず起こる事象, 全事象と言いますが, 全事象を Ω とすると, E_1 から E_n の和事象が Ω となると仮定します. すなわち, E_1 から E_n のいずれかが必ず起こる仮定します.
- 事象 E に対して実数 $P(E)$ を対応させる関数 P が次の三つの性質を満たす時, P は確率です.
- 一つ目は, 任意の事象 E に対して, $P(E) \geq 0$ が成り立つことです.
- 二つ目は, 全事象 Ω の確率 $P(\Omega)$ が 1 になるということです.
- 三つ目は, 任意の異なる事象 E_i と E_j が, 同時には起こらない, すなわち排斥な事象であれば, E_i と E_j の和事象の起こる確率は, E_i が起こる確率と E_j が起こる確率の和となることです.
- これらの性質を満たせば, P は確率となります.

期待効用最大化原理

- 事象 E と F が同時に起こる同時確率
… $P(E \cap F)$
- E が起こったことが既知という条件の下で,
 F が起こる確率 (条件つき確率) … $P(F|E)$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

- 確率の性質について, もう少しお話しします.
- 事象 E と F が同時に起こる確率を同時確率と呼びます.
- また, E が起こったことが既知という条件の下で, F が起こる確率を条件付き確率と呼びます.
- この条件付き確率は E と F の同時確率を E の確率で割った値となります.

期待効用最大化原理

ベイズの定理

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega,$$

$$E_i \cap E_j = \phi \quad (i \neq j)$$

の時,

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i)P(F|E_i)}{\sum_{j=1}^n P(E_j)P(F|E_j)}$$

- 条件付き確率に関して，ここに示すようなベイズの定理と呼ばれる性質が成り立ちます．
- このベイズの定理は，簡単な式変形で導かれますので，定理と呼ぶには大きな感じもしますが，応用上重要な性質です．
- 一つ例を示します．

期待効用最大化原理

- あるガンは 100 人に 1 人の割合でかかる
- そのガンの検査法は,
 - 実際にガンであるとき 95%の確率で陽性反応
 - ガンでないときに 5%の確率で陽性反応
- ある人を検査したところ陽性反応が出た
- その人がそのガンにかかっている確率を求めよ

- 次のような問題を考えます.
- あるガンは 100 人に 1 人の割合でかかります.
- そのガンの検査法は, 実際にガンであるとき 95%の確率で陽性反応を示しますが, ガンでないときにも 5%の確率で陽性反応を示します.
- ある人を検査したところ陽性反応が出ました.
- その人がそのガンにかかっている確率はいくつでしょうか…という問題です.
- どれくらいの確率になるか予想してみてください.

期待効用最大化原理

- ガンにかかっている C / かかっていない C^c
- $P(C) = 0.01, P(C^c) = 0.99$
- 陽性反応が出る A / 出ない A^c
- ガンである時, 陽性反応が出る $P(A|C) = 0.95$
- ガンでない時, 陽性反応が出る $P(A|C^c) = 0.05$

- ガンにかかっているという事象を C , かかっていないという事象を C^c とします.
- ガンにかかっている確率 $P(C)$ は 0.01 です.
- 検査で陽性反応が出るという事象を A とします.
- ガンである時, 陽性反応が出る確率 $P(A|C)$ は 0.95 です.
- ガンでない時, 陽性反応が出る確率 $P(A|C^c)$ は 0.05 です.

期待効用最大化原理

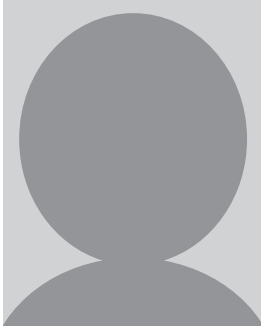
- ある人が検査で陽性反応出た時，その人がガンである確率

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(C^c)P(A|C^c)}$$

$$= \frac{0.01 \times 0.95}{0.01 \times 0.95 + 0.99 \times 0.05} \simeq 0.16$$

- $P(C)$: 検査結果を知る前の C の確率 … 事前確率
- $P(C|A)$: 検査結果を知った後の C の確率 … 事後確率

- 検査で陽性反応が出た時，その人がガンにかかっている確率は，検査で陽性反応が出たという条件の下で，ガンにかかっている条件付き確率 $P(C|A)$ となります。
- 条件付き確率 $P(C|A)$ はベイズの定理を用いて求めることができます。
- その結果，検査が陽性と出た人がガンにかかっている確率は0.16となります。
- この問題で， $P(C)$ は検査結果を知る前の C の確率で，「事前確率」と呼ばれます。
- 一方， $P(C|A)$ は検査結果を知った後の C の確率で，「事後確率」と呼ばれます。
- 事前確率がデータを得ることで事後確率に更新されます。
- この例では，事前確率を客観確率のように話しましたが，主観確率でも扱いは同じです。



- 意思決定において，決定に関連する結果の生起確率は決定に大きな影響を与えます．
- そのため，市場調査行う等，コストをかけてでも情報を得てから，意思決定を行うということもよくあります．
- その際，情報を得ることによるメリットが，コストを上回らなければ損失になりますので，情報を得るための行動をどう選択するかも意思決定問題になります．
- 興味のある方は参考文献等をご覧ください．

信号の検出と判断



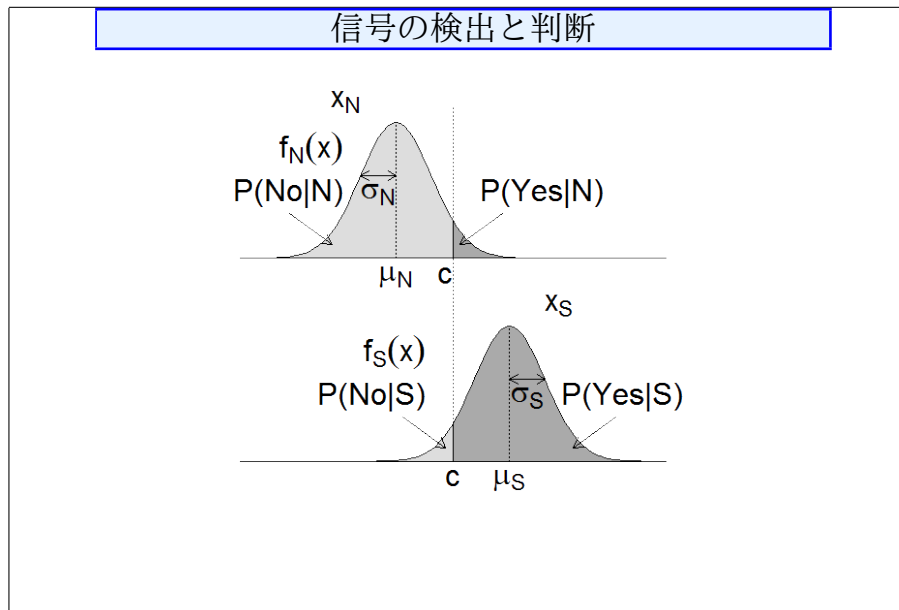
- 今度は，期待効用最大化に基づく決定を，これまでとは毛色の違う問題に適用してみます．
- ここでは，雑音の中に信号が含まれているか，あるいは雑音だけかを判断する問題を考えます．
- 雑音や信号は音である必要はなく，信号とはターゲットとなる情報，雑音とはターゲット以外の情報を意味します．
- ここで考えるのは，火災報知器のようなセンサーアラーム，ここでは簡単にセンサーと呼ぶことにします．



- 煙を感知してアラームを発するセンサーは水蒸気にも反応するとします.
- この場合，信号は煙で，雑音は水蒸気になります.
- 通常，水蒸気よりも煙のほうが，何らかの意味で刺激が強いため，刺激の強度がしきい値を超えたらアラームを発すればよいのですが，時には水蒸気の強度がしきい値を超えてしまい，火が出ていなくてもアラームを発してしまうこともあります.



- 逆に，気流の影響などで煙がセンサに届かず，煙が検知されないこともあります．
- あるいは，センサの精度が低いために，同じ物理刺激に対して，検知される量が確率的に揺らぐこともあります．
- このような状況における信号の検出と判断を期待効用最大化に基づき考えます．
-



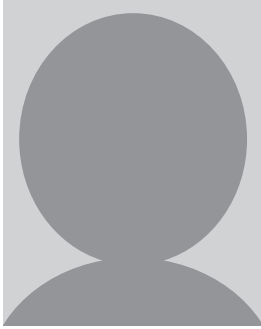
- 雑音のみの刺激 N は、平均 μ_N 、標準偏差 σ_N の正規分布 $f_N(x)$ にしたがう x の強度でセンサに受け取られるとします。
- 同様に、雑音に信号が含まれる刺激 S は、平均 μ_S 、標準偏差 σ_S の正規分布 $f_S(x)$ にしたがう x の強度でセンサに受け取られるとします。
- 雑音のみの刺激より、雑音と信号を含む刺激の方が、刺激強度が大きいと仮定します。
- すなわち、 μ_N より μ_S が大きいと仮定します。
- 受け取られた刺激の強度 x がしきい値 c を超えたら、信号あり、すなわち Yes と反応し、 x が c 以下であれば信号なし、すなわち No と反応するものとします。
- 刺激 N に対して、 No と反応する確率 $P(\text{No}|N)$ は、 N の分布の c より左の領域の面積となります。
- また、刺激 N に対して、 Yes と反応する確率 $P(\text{Yes}|N)$ は、 N の分布の c より右の領域の面積となります。
- 同様に、刺激 S に対して、 No と反応する確率 $P(\text{No}|S)$ は、 S の分布の c より左の領域の面積となります。
- また、刺激 S に対して、 Yes と反応する確率 $P(\text{Yes}|S)$ は、 S の分布の c より右の領域の面積となります。
- 図から分かるように、 c を大きくすると、信号がないのに Yes と誤って反応する確率、 $P(\text{Yes}|N)$ が小さくなりますが、信号があるのに誤って No と反応する確率、 $P(\text{No}|S)$ が大きくなり、これら両方の誤りの確率を同時に最小にすることはできません。
- そこで、期待効用最大化の考え方を適用します。

信号の検出と判断

- 刺激 N に対して No と反応したときの効用 $u_N(No)$
- 刺激 N に対して Yes と反応したときの効用 $u_N(Yes)$
- 刺激 S に対して No と反応したときの効用 $u_S(No)$
- 刺激 S に対して Yes と反応したときの効用 $u_S(Yes)$
- 刺激が N の確率 $P(N)$ ，刺激が S の確率 $P(S)$
- しきい値を c した時の期待効用 EU_c

$$EU_c = P(N)P_c(No|N)u_N(No) + P(N)P_c(Yes|N)u_N(Yes) \\ + P(S)P_c(No|S)u_S(No) + P(S)P_c(Yes|S)u_S(Yes)$$

- 起こり得る結果とその効用を次のように表わすようにします。
- 刺激 N に対して，正しく No と反応したときの効用を $u_N(No)$ とします。
- 刺激 N に対して，誤って Yes と反応したときの効用を $u_N(Yes)$ とします。
- 言うまでもなく，刺激に対してセンサーは正しく反応すべきですので，効用に関して， $u_N(No)$ のほうが $u_N(Yes)$ より大きいことを仮定します。
- 刺激 S に対して，誤って No と反応したときの効用を $u_S(No)$ とします。
- 刺激 S に対して，正しく Yes と反応したときの効用を $u_S(Yes)$ とします。
- 刺激 S に対しても，効用に関して， $u_S(Yes)$ のほうが $u_S(No)$ より大きいことを仮定します。
- 刺激が N である確率を $P(N)$ ， S である確率を $P(S)$ とします。
- 刺激の強度 x がしきい値 c を超えたら， Yes と反応しますが， c を変化させると， Yes と反応する確率は変化しますから，確率は c をパラメタとする関数 P_c とします。
- 期待効用 EU_c もしきい値 c により変化しますので， c の関数になります。
- 期待効用 EU_c は，4 種類の結果の効用に生起確率をかけて加えたものになります。
- 期待効用 EU_c を最大にする，しきい値 c を決定する問題ということになります。
- ここから先は，数式の操作が少々ややこしくなります。
- 数式の操作が分からなくても，気にする必要はありませんが，ここまでの考え方は理解しておいていただきたいと思います。



- すなわち，刺激に対するセンサーの反応の効用を定めて，しきい値 c をパラメタとする期待効用を考え，期待効用が最大になるようにしきい値 c を決定しようというアイデアです．
- それでは，最適なしきい値 c の値を求めてみましょう．

信号の検出と判断

$$\begin{aligned}
 EU_c &= P(N)P_c(No|N)u_N(No) + P(N)P_c(Yes|N)u_N(Yes) \\
 &\quad + P(S)P_c(No|S)u_S(No) + P(S)P_c(Yes|S)u_S(Yes) \\
 &= P(N) \{P_c(No|N)(u_N(No) - u_N(Yes)) + u_N(Yes)\} \\
 &\quad + (1 - P(N)) \{P_c(No|S)(u_S(No) - u_S(Yes)) + u_S(Yes)\}
 \end{aligned}$$

- EU_c を最大化する c

$$\frac{d}{dc} EU_c = 0 \text{ となる } c$$

- $P(N)$ と $P(S)$ の和は 1 になります.
- 同様に, $P_c(No|N)$ と $P_c(Yes|N)$ の和, $P_c(No|S)$ と $P_c(Yes|S)$ の和も 1 になりますので,
- この関係を利用すると, 期待効用 EU_c の式は, ここに示すように変形できます.
- EU_c を最大化する c は, EU_c を c で微分した値が 0 になる c として求めることができます.

信号の検出と判断

$$EU_c = P(N) \{P_c(No|N)(u_N(No) - u_N(Yes)) + u_N(Yes)\} \\ + (1 - P(N)) \{P_c(No|S)(u_S(No) - u_S(Yes)) + u_S(Yes)\}$$

- $P_c(No|N)$ の c による微分

$$P_c(No|N) = \int_{-\infty}^c f_N(x) dx$$

$$\frac{d}{dc} P_c(No|N) = \frac{d}{dc} \int_{-\infty}^c f_N(x) dx = f_N(c)$$

- EU_c のうち, c の関数になっているのは, $P_c(No|N)$ と $P_c(No|S)$ ですので, これらの関数を c で微分する必要があります.
- $P_c(No|N)$ と $P_c(No|S)$ は密度関数の c より左の領域の面積でした.
- 例えば, $P_c(No|N)$ は密度関数 $f_N(x)$ をマイナス無限大から c まで積分した値になります.
- これを c で微分すると, 微分と積分の関係から, 密度関数に c を代入した値, すなわち $f_N(c)$ となります.
- 同様に $P_c(No|S)$ を c で微分すると, $f_S(c)$ となります.
- これらを用いて, EU_c を c で微分します.

信号の検出と判断

- EU_c を最大にするには

$$\begin{aligned} \frac{dEU_c}{dc} = & P(N)f_N(c)(u_N(No) - u_N(Yes)) \\ & + (1 - P(N))f_S(c)(u_S(No) - u_S(Yes)) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{f_S(c)}{f_N(c)} = \frac{P(N)(u_N(No) - u_N(Yes))}{(1 - P(N))(u_S(Yes) - u_S(No))}$$

となる c をしきい値とすれば EU_c が最大

- EU_c の c による微分の値を 0 とおき，式を変形すると下の式になります．
- この式を満たす c が期待効用を最大にします．
- c の値は，計算機を用いれば簡単に求めることができます．
- このように期待効用最大化により，センサーシステムの最適な構成を行うことができます．

信号の検出と判断

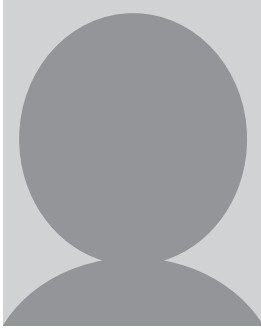
最適しきい値 c が小さい

- 信号がない場合に誤ってアラームを発することには寛容
- 信号を見落とさないことを重視
- スクリーニング

- しきい値 c が小さい場合には、信号があるのに No と反応する確率が小さくなりますが、信号がないのに Yes と反応する確率が大きくなります。
- 煙の検知において、最適なしきい値 c が小さい場合は、煙がないのに間違えてアラームを発することには目をつむってでも、煙の発生を見逃してはいけないということになります。
- 火災報知機の場合は、煙がないのに間違えてアラームを発することが多いのもかなり困ったことになりますが、医学におけるスクリーニングは、特定の異常の可能性のある対象者を選別する検査を行い、選別された対象者をより精緻な検査や診断へつなげるための最初の段階と位置づけられるため、異常の可能性のある対象者を見逃さないことが特に重視されます。
- 一方、治療を開始するための検査では、異常がないのに誤って異常があるとして、不必要な手術や投薬を行う害が大きく、異常を見逃しても経過観察すれば手遅れにならないという状況もあります。
- そのような状況では、異常がないのに異常と反応しないことが重視されます。
- これらの例から分かるように、信号があるのに No と反応する誤りの損失と、信号がないのに Yes と反応する誤りの損失のどちらを重視するかは、状況に依存します。
- したがって、状況に応じて、適切に効用を評価することが重要になります。



- 今回の講義では，統計的決定についてお話しました．
- 不確実性が伴う状況で合理的に決定を行うためには，統計的なアプローチが必要になりますが，期待効用最大化に基づく決定は，効用の期待値が最大になる選択するという，極めて単純な原理に基づき，広い範囲に適用可能ということがお分かりいただけたでしょうか．
- 今回はこれで終わります．



- 期待効用最大化に基づく決定が最適な決定であることは，先ほど示した4つの前提を満たせば，数学的に導かれます．
- 導出の過程は省きましたが，それほど難しいものではありません．
- なお，前提として示した公理系は，今回示したものとは違う書き方をしているものもありますが，本質的には同じことですので，みなさんにとって分かりやすい公理系で理解すればよいでしょう．



- 人間が行う決定が期待効用最大化に従わないという例が数多く報告されていますが，だからこそ期待効用最大化に基づく意思決定支援が重要であるという考え方と，4つの前提の妥当性に問題があるという考え方が存在します.
- 期待効用最大化を巡る問題は，心理学や一部の経済学で盛んに研究が行われていますので，興味のある方は調べてみるといいでしょう.
- 今回はこれ終わります.