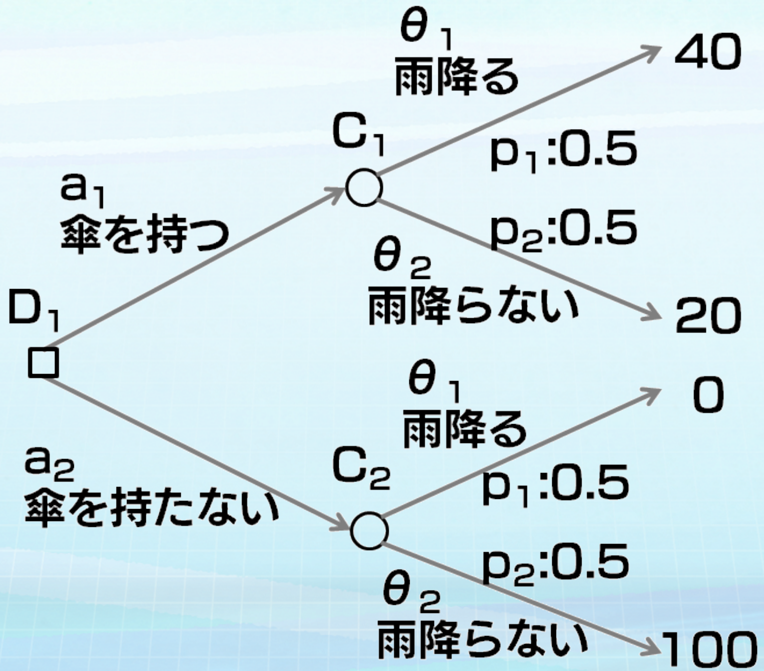
期待効用に基づく決定

◆雨の日の外出

- 雨が降る確率は0.5
- 傘を持って外出，雨が降った … 効用は40
- 傘を持って外出，雨が降らなかった … 効用は20
- 傘を持たずに外出，雨が降った … 効用は0
- 傘を持たずに外出，雨が降らなかった … 効用は100
- 傘を持って外出するべきか？

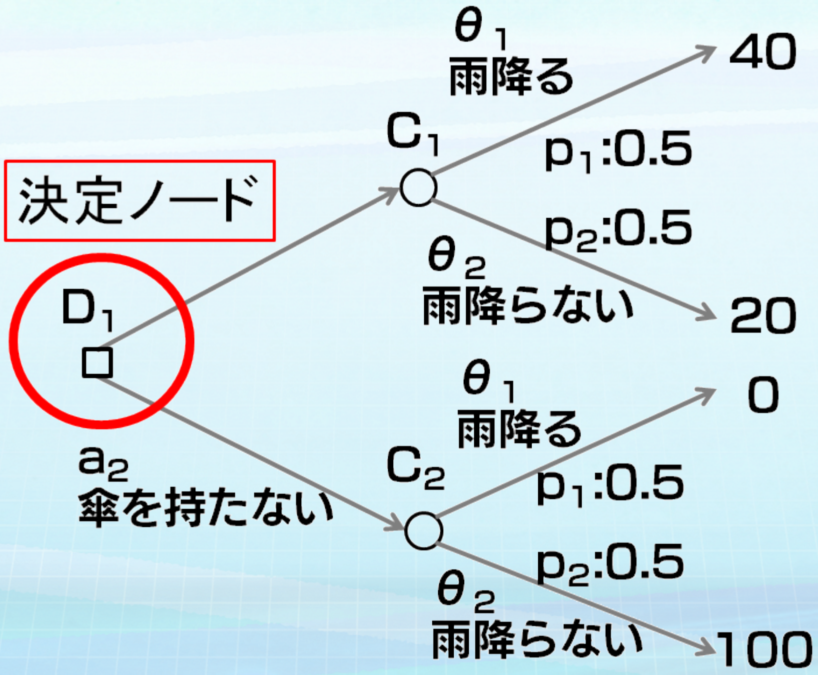
期待効用に基づく決定

◆決定木



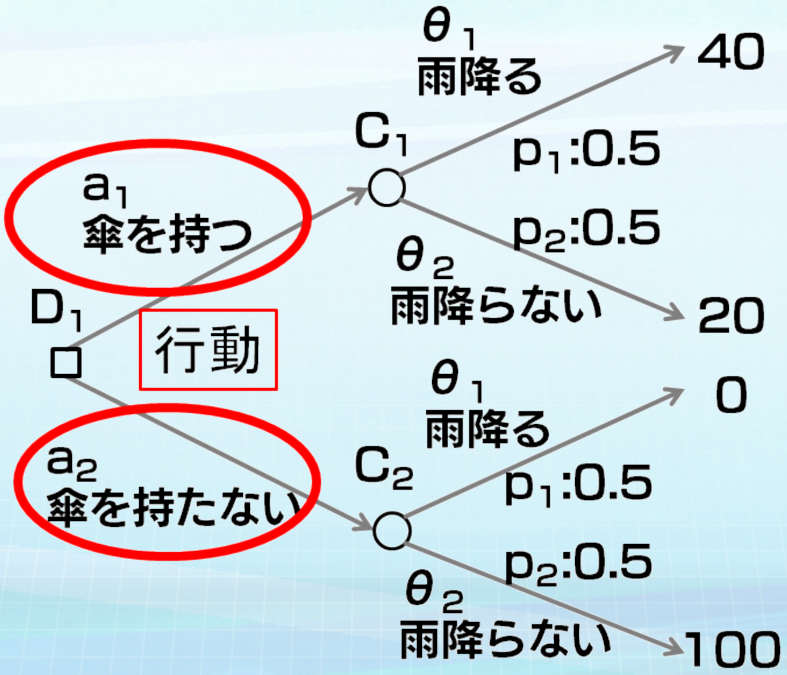
期待効用に基づく決定

◆決定木



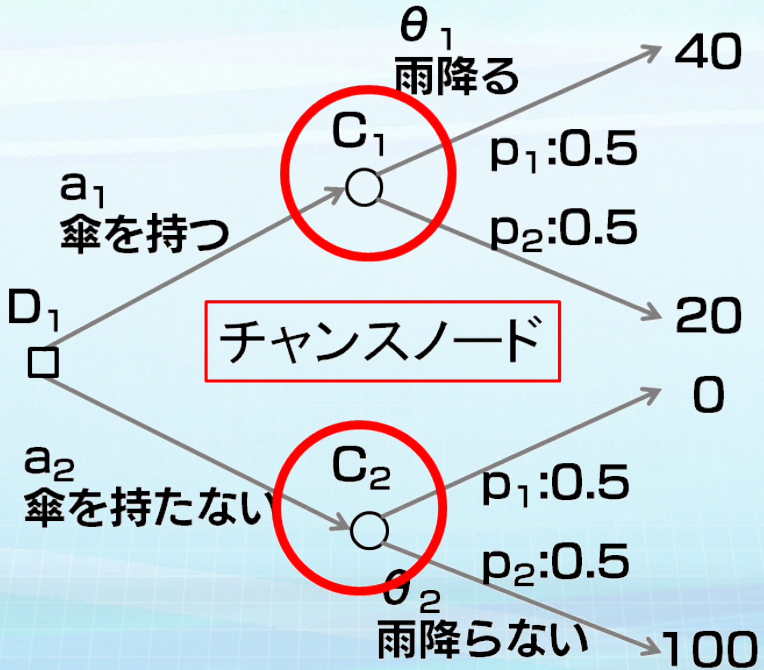
期待効用に基づく決定

◆決定木



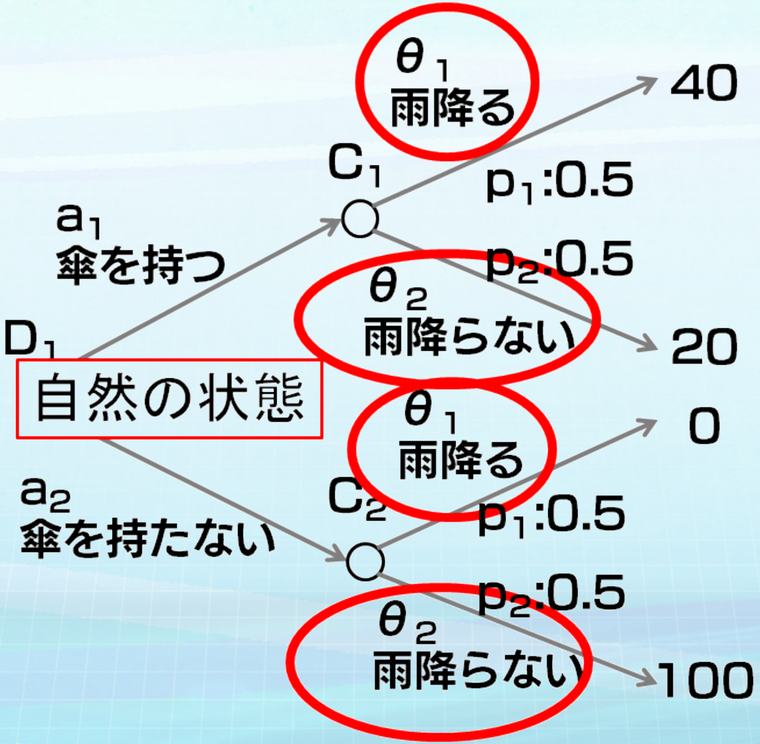
期待効用に基づく決定

◆決定木



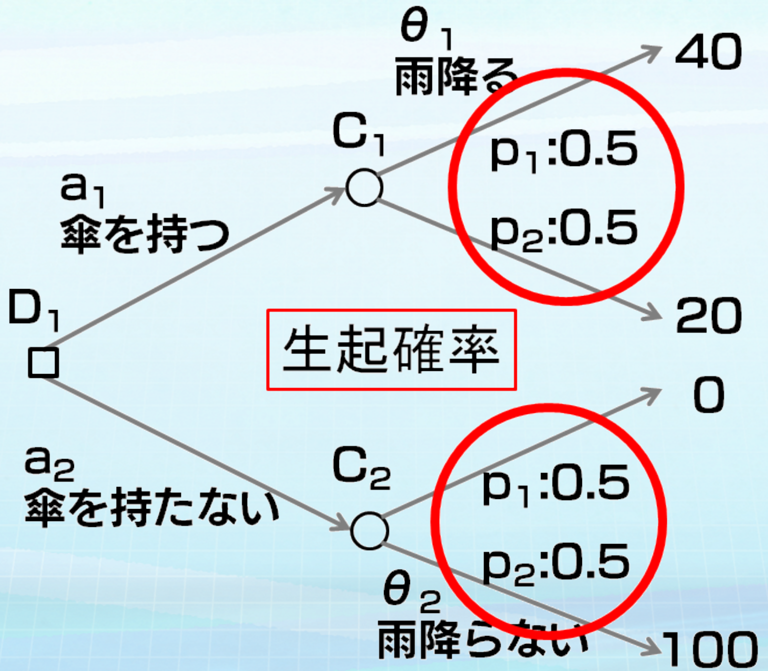
期待効用に基づく決定

◆決定木



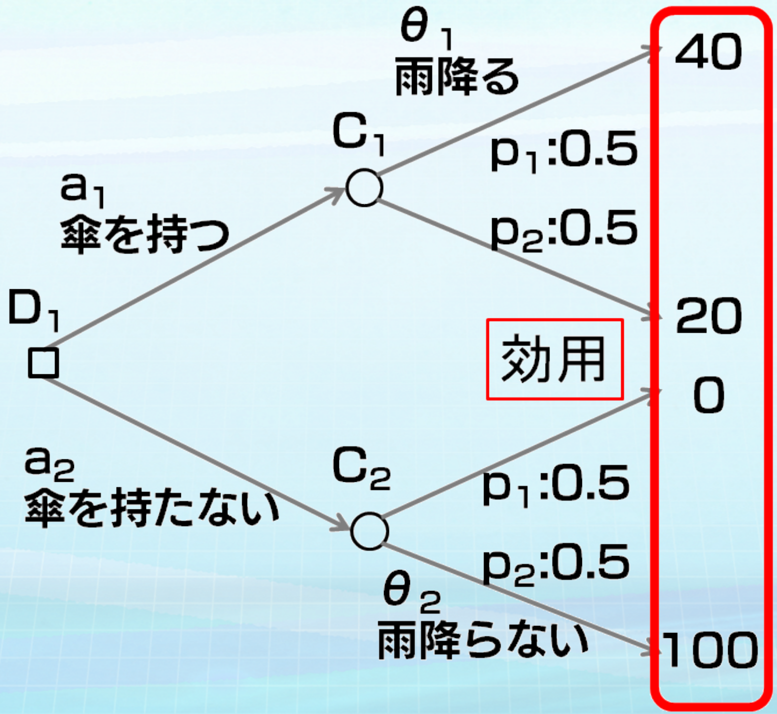
期待効用に基づく決定

◆決定木



期待効用に基づく決定

◆決定木

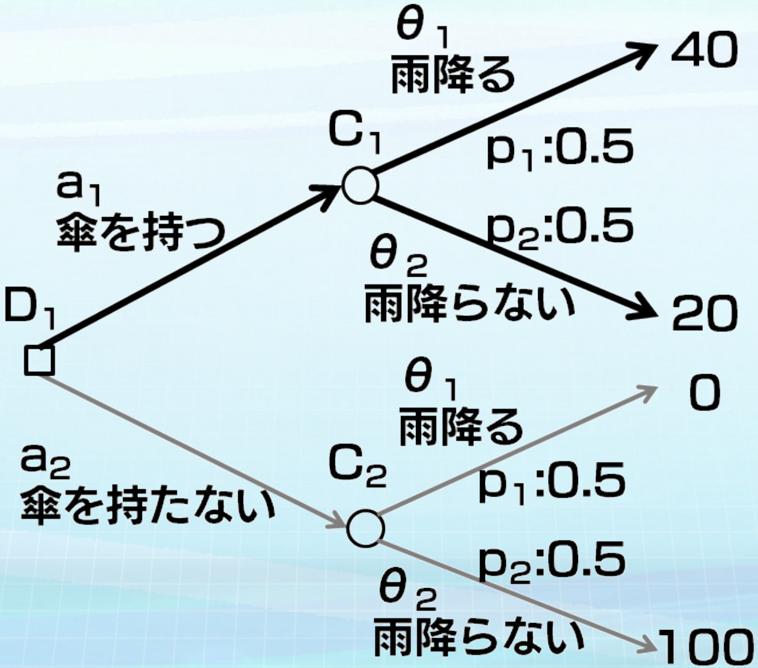


期待効用に基づく決定

◆期待効用に基づく決定

- 効用の期待値 … 期待効用
- 特定の行動に対し，生ずる結果の確率で結果の効用を重み付けした和
- 期待効用が最大になる行動をとる

期待効用に基づく決定



θ 1
雨降る
40
C1
p1:0.5
a1
傘を持つ
p2:0.5
θ 2
雨降らない
D1
20
θ 1
雨降る
0
a2
傘を持たない
C2
p1:0.5
p2:0.5
θ 2
雨降らない
100

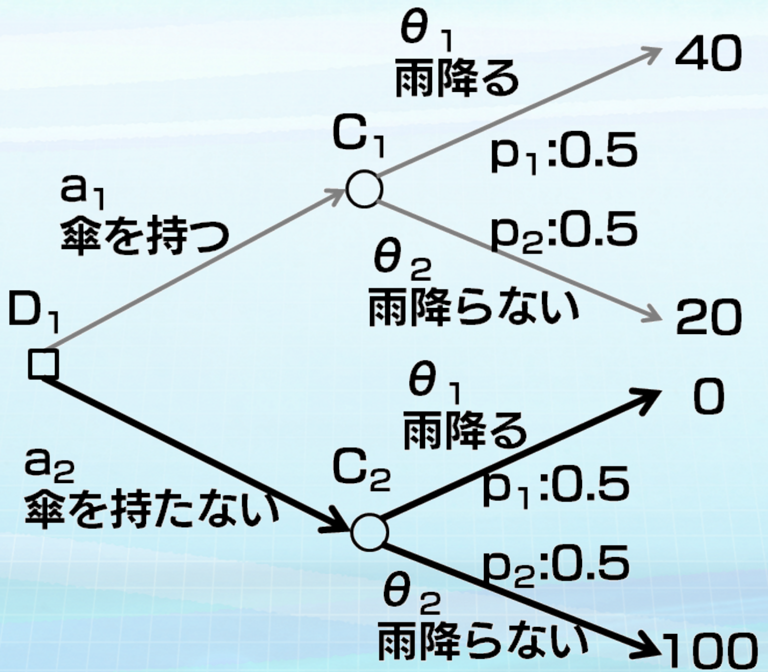
期待効用に基づく決定

◆傘を持って外出した場合…a_1

- 確率$p_1 = P(\theta_1) = 0.5$で雨が降る(θ_1)
- 雨が降る(θ_1)時の効用$u(a_1, \theta_1)$は40
- 確率$p_2 = P(\theta_2) = 0.5$で雨は降らない(θ_2)
- 雨が降らない(θ_2)時の効用$u(a_1, \theta_2)$は20
- 傘を持って外出した場合の期待効用は

$$p(\theta_1)u(a_1, \theta_1) + p(\theta_2)u(a_1, \theta_2) = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 20 = 30$$

期待効用に基づく決定


θ 1
雨降る
40
C1
p1:0.5
a1
傘を持つ
p2:0.5
θ 2
雨降らない
D1
20
θ 1
0
雨降る
a2
C2
p1:0.5
傘を持たない
p2:0.5
θ 2
雨降らない
100

期待効用に基づく決定

◆傘を持たずに外出した場合…a_2

- 確率$p_1 = P(\theta_1) = 0.5$で雨が降る(θ_1)
- 雨が降る(θ_1)時の効用$u(a_2, \theta_1)$は0
- 確率$p_2 = P(\theta_2) = 0.5$で雨は降らない(θ_2)
- 雨が降らない(θ_2)時の効用$u(a_2, \theta_2)$は100
- 傘を持たずに外出した場合の期待効用は

$$p(\theta_1)u(a_2, \theta_1) + p(\theta_2)u(a_2, \theta_2) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 100 = 50$$

期待効用に基づく決定

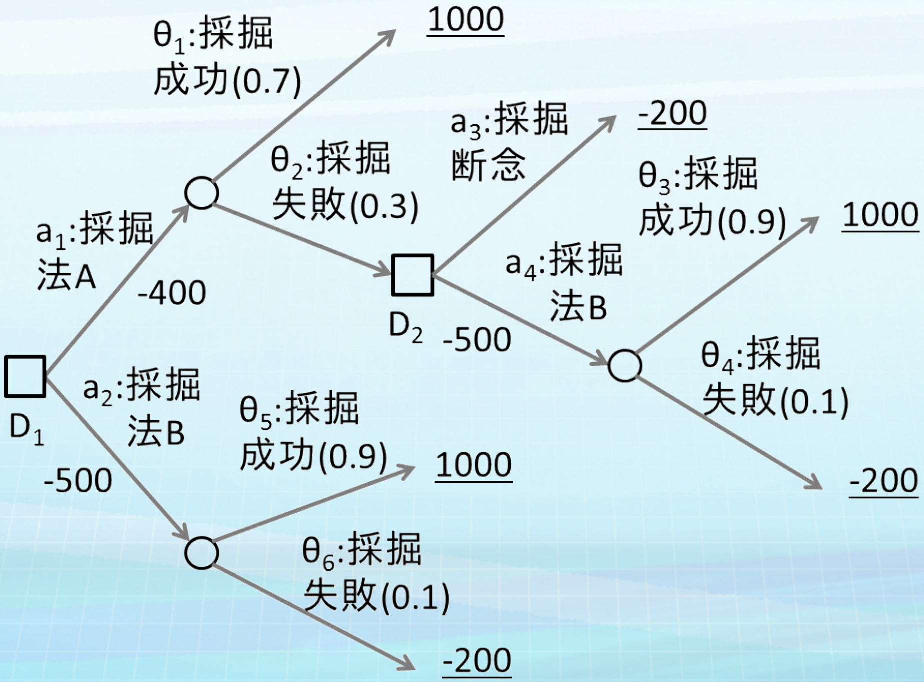
- 傘を持って外出した時の期待効用 … 30
- 傘を持たずに外出した時の期待効用 … 50
- 傘を持たずに外出すべき

期待効用に基づく決定

◆多段階決定問題

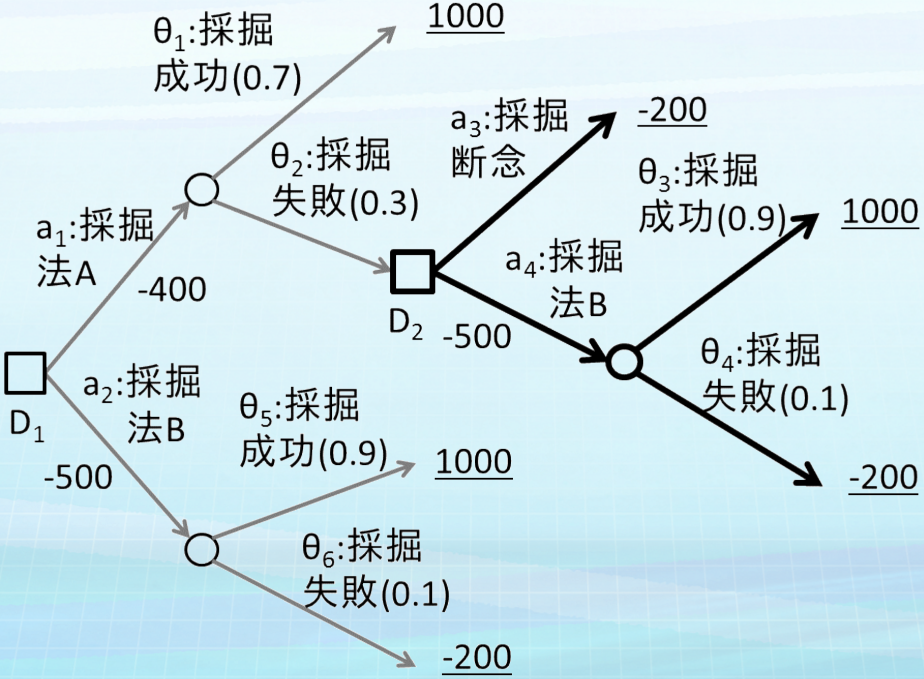
- 資源の採掘に成功したら1000億円の収入
- 資源の採掘を断念したら200億円のペナルティ
- 採掘法Aは400億円のコストがかかり，成功率0.7
- 採掘法Bは500億円のコストがかかり，成功率0.9
- 採掘法Aに失敗してから採掘法Bで再挑戦可

期待効用に基づく決定



θ1:採掘
成功(0.7)
1000
θ2:採掘
失敗(0.3)
a3:採掘
断念
-200
θ3:採掘
成功(0.9)
1000
a1:採掘
法A
-400
a4:採掘
法B
D2
-500
θ4:採掘
失敗(0.1)
-200
D1
a2:採掘
法B
-500
θ5:採掘
成功(0.9)
1000
θ6:採掘
失敗(0.1)
-200

期待効用に基づく決定



θ1:採掘
成功(0.7)
1000
θ2:採掘
失敗(0.3)
a3:採掘
断念
-200
θ3:採掘
成功(0.9)
1000
a1:採掘
法A
-400
a4:採掘
法B
D2
-500
θ4:採掘
失敗(0.1)
-200
D1
a2:採掘
法B
-500
θ5:採掘
成功(0.9)
1000
θ6:採掘
失敗(0.1)
-200

期待効用に基づく決定

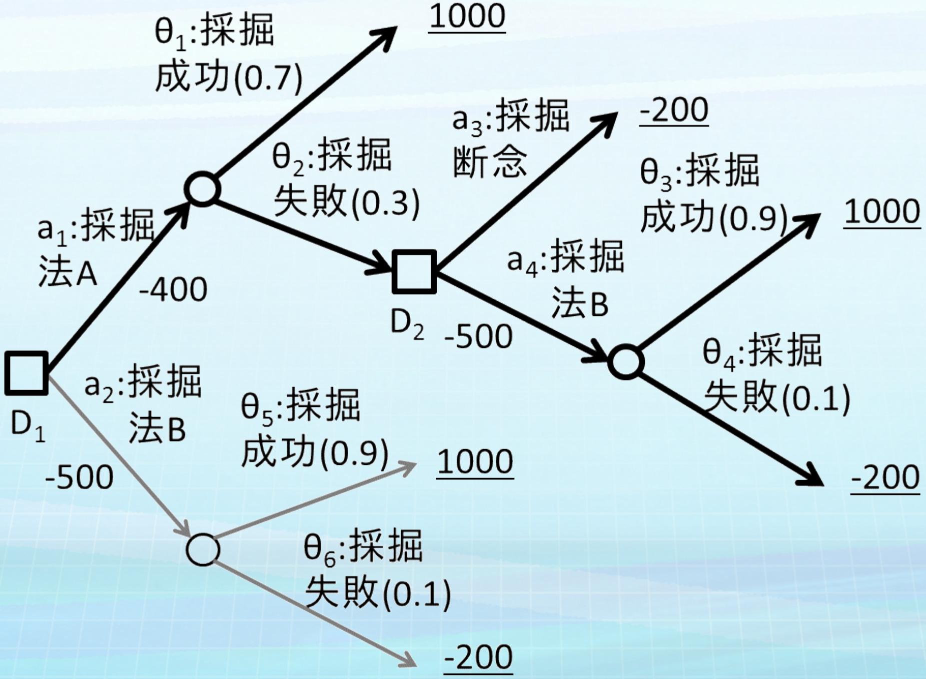
◆ D_2

- 採掘断念 (a_3) $\cdots\ -200$
- 採掘法B(a_4)
  - 採掘成功 (θ_3) $\cdots\ -500 + 1000 = 500$
  - 採掘失敗 (θ_4) $\cdots\ -500 - 200 = -700$
  - 成功確率 0.9

$$0.9 \times 500 + 0.1 \times (-700) = 380$$

- 採掘法Aに失敗したら，採掘法Bで再挑戦すべき

期待効用に基づく決定



θ1:採掘
成功(0.7)
1000
θ2:採掘
失敗(0.3)
a3:採掘
断念
-200
θ3:採掘
成功(0.9)
1000
a1:採掘
法A
-400
a4:採掘
法B
D2
-500
θ4:採掘
失敗(0.1)
-200
D1
a2:採掘
法B
-500
θ5:採掘
成功(0.9)
1000
θ6:採掘
失敗(0.1)
-200

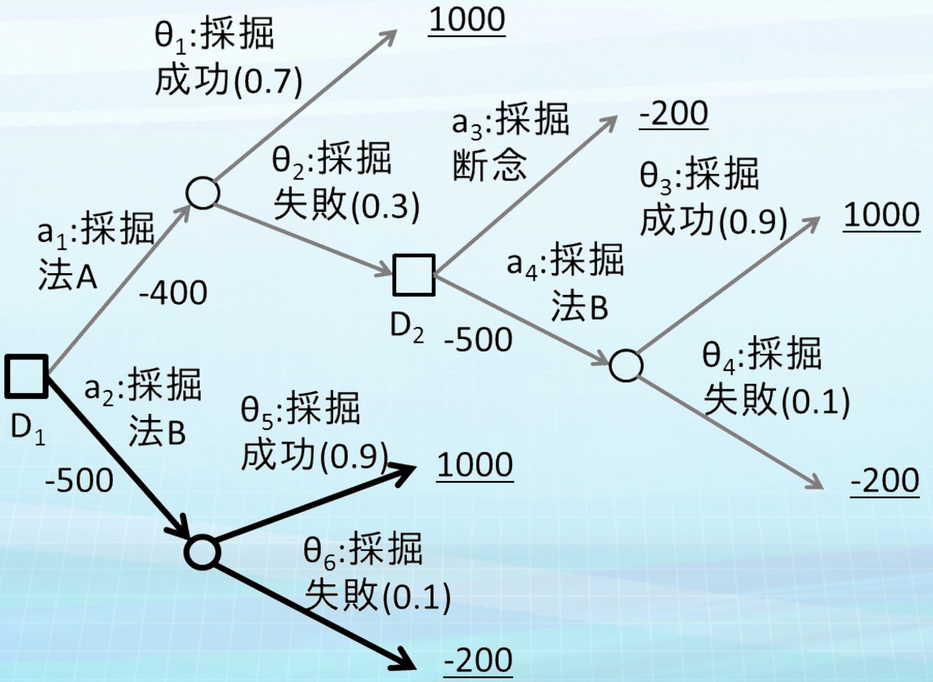
期待効用に基づく決定

◆ D_1 で採掘法 $\mathbf{A}(a_1)$

- 採掘成功 (θ_1) $\cdots$ $-400 + 1000 = 600$
- 採掘失敗 (θ_2) $\cdots$ $-400 + 380 = -20$
- 成功確率 0.7

$$0.7 \times 600 + 0.3 \times (-20) = 414$$

期待効用に基づく決定


θ1:採掘
成功(0.7)
1000
θ2:採掘
失敗(0.3)
a3:採掘
断念
-200
θ3:採掘
成功(0.9)
1000
a1:採掘
法A
-400
a4:採掘
法B
D2
-500
D1
a2:採掘
法B
θ4:採掘
失敗(0.1)
θ5:採掘
成功(0.9)
1000
-200
-500
θ6:採掘
失敗(0.1)
-200

期待効用に基づく決定

◆ D_1 で採掘法B(a_2)

- 採掘成功 $(\theta_5)\ \cdots\ -500+1000=500$
- 採掘失敗 $(\theta_6)\ \cdots\ -500-200=-700$
- 成功確率 0.9

$$0.9\times 500+0.1\times(-700)=380$$

期待効用に基づく決定

◆期待効用

- 採掘法A，失敗したら採掘法Bで再挑戦 $(a_1 \to a_4) \cdots 414$
- 最初から採掘法B $(a_2) \cdots 380$
- 最初に採掘法A(a_1)を選択し、失敗したら採掘法B (a_4)で再挑戦を選択すべき

期待効用最大化原理

期待効用最大化原理

◆結果

- 行動aを選択し，状態θが生じた結果$y=(a,\theta)$

◆前提１：多様性公理

- 行動と状態は各々2種類以上存在
- 結果の集合は4つ以上の異なる結果を含む

期待効用最大化原理

◆くじ

- 確率 p で結果 y_1，確率 $1-p$ で結果 y_2 が起こるくじ

$$(y_1 : p, y_2 : 1-p)$$

- くじ $L_1 = (y_1 : p_1, y_2 : 1-p_1)$ が確率 q で起こり，$L_2 = (y_3 : p_2, y_4 : 1-p_2)$ が確率 $1-q$ でおこる複合的くじ

$$(L_1 : q, L_2 : 1-q)$$

期待効用最大化原理

◆くじ

- くじ $L_1 = (y_1 : p_1, y_2 : 1 - p_1)$ が確率 q で起こり，
  $L_2 = (y_3 : p_2, y_4 : 1 - p_2)$ が確率 $1 - q$ でおこる
  複合的くじ
  $$(L_1 : q, L_2 : 1 - q)$$
  $$(y_1 : p_1 q, y_2 : (1 - p_1)q, y_3 : p_2(1 - q), y_4 : (1 - p_2)(1 - q))$$
- n 種類の結果が起こるくじ
  $(y_1 : p_1, y_2 : p_2, \cdots, y_n : p_n)$

期待効用最大化原理

◆選好

$x \succeq y$ 　yがxより好ましくはない

$x \sim y$ 　$x \succeq y$ かつ $y \succeq x$ … 無差別

$x \succ y$ 　$x \succeq y$ であって $y \succeq x$でない

$x \succeq y$ であって $x \sim y$でない

期待効用最大化原理

◆前提２：弱順序公理

すべての結果やくじx, y, zに対して次が成り立つ.

反射律 $x \sim x$

推移律 $x \succeq y, y \succeq z$ ならば $x \succeq z$

完備性 $x \succeq y$ または $y \succeq x$ の少なくとも一方が成り立つ

期待効用最大化原理

◆前提３：連続性公理

x, y, zの間に$x \succ y \succ z$が成り立つならば,

$$(x : p, z : 1-p) \sim y$$

を満たす$0 < p < 1$が存在する

期待効用最大化原理

◆前提４：独立性公理

$x \sim y$ならば，任意のzと任意の$0 \leq p \leq 1$に対して，

$$(x : p, z : 1-p) \sim (y : p, z : 1-p)$$

が成り立つ

期待効用最大化原理

前提１～４を満たす時

- 任意の結果x, yに対し
$$x \succeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$
を満たす**効用関数** uが一意に定まる
- くじ
$$L = (y_1 : p_1, y_2 : p_2, \cdots, y_n : p_n)$$
の効用は
$$p_1\, u(y_1) + p_2\, u(y_2) + \cdots + p_n\, u(y_n)$$

期待効用最大化原理

◆主観確率

- 繰り返しのない事象の生起確率
  - 生起頻度から得られない
  - 主観的な判断に基づく … 主観確率
- 確率の公理を満たせば確率

期待効用最大化原理

n個の事象$E_1, E_2, \cdots, E_n$に関して,

- 必ず起こる事象(全事象)をΩとすると,

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$$

- 事象Eに対して実数$P(E)$を対応させる関数で,

1. 任意の事象Eに対して, $P(E) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$ であれば

$$P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j)$$

期待効用最大化原理

- 事象 E と F が同時に起こる同時確率
  $\cdots\ P(E \cap F)$
- E が起こったことが既知という条件の下で,
  F が起こる確率(条件つき確率) $\cdots\ P(F|E)$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

期待効用最大化原理

◆ベイズの定理

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega,$$
$$E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$$

の時,

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i)P(F|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(F|E_j)}$$

期待効用最大化原理

- あるガンは100人に1人の割合でかかる
- そのガンの検査法は,
  - 実際にガンであるとき95%の確率で陽性反応
  - ガンでないときに5%の確率で陽性反応
- ある人を検査したところ陽性反応が出た
- その人がそのガンにかかっている確率を求めよ

期待効用最大化原理

- ガンにかかっている C / かかっていない C^c
- $P(C) = 0.01,\ P(C^c) = 0.99$
- 陽性反応が出る A / 出ない A^c
- ガンである時，陽性反応が出る $P(A|C) = 0.95$
- ガンでない時，陽性反応が出る $P(A|C^c) = 0.05$

期待効用最大化原理

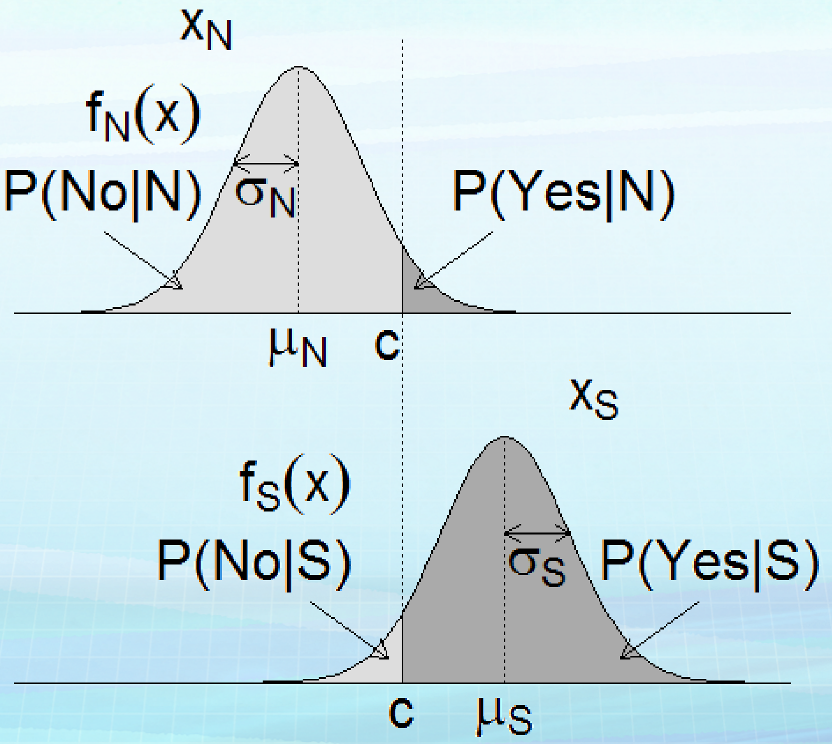
- ある人が検査で陽性反応出た時，その人がガンである確率

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(C^c)P(A|C^c)}$$
$$= \frac{0.01 \times 0.95}{0.01 \times 0.95 + 0.99 \times 0.05} \simeq 0.16$$

- $P(C)$: 検査結果を知る前の C の確率 $\cdots$ 事前確率
- $P(C|A)$: 検査結果を知った後の C の確率 $\cdots$ 事後確率

信号の検出と判断

信号の検出と判断



信号の検出と判断

- 刺激 N に対して No と反応したときの効用 $u_N(No)$
- 刺激 N に対して Yes と反応したときの効用 $u_N(Yes)$
- 刺激 S に対して No と反応したときの効用 $u_S(No)$
- 刺激 S に対して Yes と反応したときの効用 $u_S(Yes)$
- 刺激が N の確率 $P(N)$，刺激が S の確率 $P(S)$
- しきい値を c した時の期待効用 EU_c

$$
\begin{aligned}
EU_c = \; & P(N)P_c(No|N)u_N(No) + P(N)P_c(Yes|N)u_N(Yes) \\
& + P(S)P_c(No|S)u_S(No) + P(S)P_c(Yes|S)u_S(Yes)
\end{aligned}
$$

信号の検出と判断

$$
\begin{aligned}
EU_c =& P(N)P_c(No|N)u_N(No) + P(N)P_c(Yes|N)u_N(Yes) \\
&+ P(S)P_c(No|S)u_S(No) + P(S)P_c(Yes|S)u_S(Yes) \\
&= P(N)\left\{P_c(No|N)(u_N(No) - u_N(Yes)) + u_N(Yes)\right\} \\
&+ (1 - P(N))\left\{P_c(No|S)(u_S(No) - u_S(Yes)) + u_S(Yes)\right\}
\end{aligned}
$$

- EU_c を最大化する c

$$\frac{d}{dc}EU_c = 0 \text{ となる } c$$

信号の検出と判断

$$EU_c = P(N)\{P_c(No|N)(u_N(No) - u_N(Yes)) + u_N(Yes)\}$$
$$+ (1 - P(N))\{P_c(No|S)(u_S(No) - u_S(Yes)) + u_S(Yes)\}$$

- $P_c(No|N)$ の c による微分

$$P_c(No|N) = \int_{-\infty}^{c} f_N(x)dx$$

$$\frac{d}{dc}P_c(No|N) = \frac{d}{dc}\int_{-\infty}^{c} f_N(x)dx = f_N(c)$$

信号の検出と判断

- EU_cを最大にするには

$$\begin{aligned}\frac{dEU_c}{dc} &= P(N)f_N(c)(u_N(No)-u_N(Yes)) \\ &+ (1-P(N))f_S(c)(u_S(No)-u_S(Yes))=0\end{aligned}$$

$$\frac{f_S(c)}{f_N(c)}=\frac{P(N)(u_N(No)-u_N(Yes))}{(1-P(N))(u_S(Yes)-u_S(No))}$$

となるcをしきい値とすればEU_cが最大

信号の検出と判断

◆最適しきい値cが小さい

- 信号がない場合に誤ってアラームを発することには寛容
- 信号を見落とさないことを重視
- スクリーニング