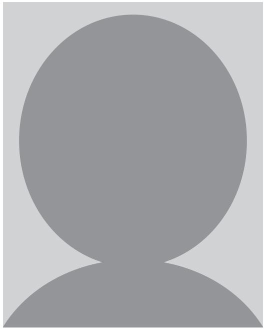
問題解決の数理（’１７）

- 収録本番とは多少異なっていることがあります.
- 内容の間違いのご指摘は歓迎します.
- 「完全に無保証」です.



- 今回の講義では，待ち行列理論についてお話します.
- 待ち行列理論とは，例えば，人気ラーメン店の行列の長さや待ち時間といった現象を確率論に基づくモデルにより解析するための理論です.
- ラーメン店に限らず，待つことは様々な状況に存在します.

待ち行列システム

待ちの現象

- 人気ラーメン店の行列
- 銀行の窓口やスーパーマーケットのレジの順番待ち
- 人気アイドルのイベントのチケット予約の電話がなかなかつながらない
- 計算機内ではジョブの処理待ち
- 通信ネットワークにおけるルータ内でのパケットの処理待ち

- 例えば，銀行の窓口やスーパーマーケットのレジの順番待ち，人気アイドルのイベントのチケット予約の電話がなかなかつながらない，といったことは経験したり，話を聞いたことがあると思います．
- また，計算機内や通信ネットワークのルーター内での処理待ち等，待ちは機械の中でも発生します．

待ち行列システム

待ち行列理論

- 待ちの現象を，確率論を用いてモデル化して分析するための理論
- ラーメン店の行列に並んでからラーメンが供されるまでにかかる時間，行列に並ぶ人数
- 待ち時間や行列の人数を一定以内に抑えるのに必要なサービスの窓口の数

- このような待ちの現象を，確率論を用いてモデル化して分析するための理論が待ち行列理論です．
- 待ち行列理論により，ラーメン店の行列に並んでからラーメンが出されるまでにかかる時間や行列に並ぶ人数を算出することができます．
- また，待ち時間や行列の人数を一定以内に抑えるのに必要なサービスの窓口の数を算出することができます．

待ち行列システム

待ち行列理論

- 電話がつながらない確率，つながらない確率を一定以内に抑えるのに必要な回線数

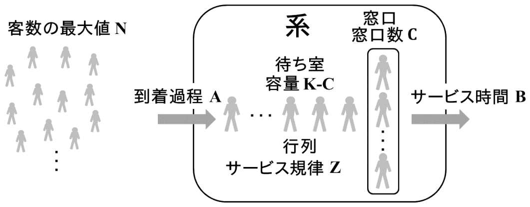
$\Downarrow$

サービスの評価や設計に応用

- 電話の例では，電話がつながらない確率を算出したり，電話がつながらない確率を一定以内に抑えるのに必要な回線数を算出することができます．
- そのため，待ち行列理論は，サービスの評価や設計に応用されています．

待ち行列システム

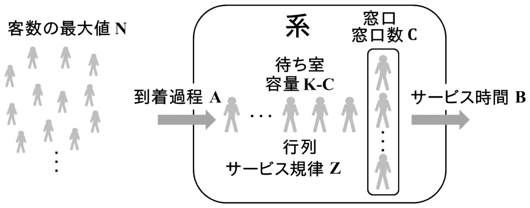
- レジに客が会計に来ること … 到着
- レジ … 窓口（サーバ）
- レジにおける処理 … サービス
- 処理にかかる時間 … サービス時間



- 待ち行列理論で扱う待ち行列のモデル，すなわち待ち行列システムを，店のレジを例に示します．
- レジに客が会計に来ることを到着と呼びます．
- レジのことをサービスを行うということでサーバ，または窓口と呼びます．
- レジにおける購入商品の入力，支払と釣銭のやり取り等の処理をサービスと呼び，サービスに要する時間をサービス時間と呼びます．

待ち行列システム

- 全ての窓口が客でふさがっている時にサービスを待つ場所 … 待ち室
- 待ち室内の客の数 … 行列の長さ
- 窓口＋待ち室 … システム（系）

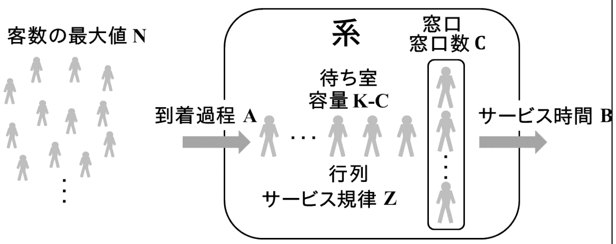


- すべての窓口が客でふさがっている時，サービスを待つ場所を待ち室と呼びます.
- 待ち室に入っている客の数のことを行列の長さと呼びます.
- 窓口と待ち室を合わせてシステム，または系と呼びます.

待ち行列システム

待ち行列システム

A 到着過程
B サービス時間
C 窓口数
K 系の容量
N 客数の最大数
Z サービス規律



- 待ち行列システムは，到着過程，サービス時間，窓口数，系の容量，客数の最大数，サービス規律の 6 要素からなるモデルです．

待ち行列システム

待ち行列システム

A 到着過程 客の到着の様子 ⋯ 客の到着の時間間隔の分布としてモデル化

- 客がランダムに到着 ⋯ 指数分布 M
- 到着の時間間隔が一定時間 ⋯ 一定分布 D
- 特定の分布に限定せず，独立性も仮定しない一般の分布 ⋯ 一般分布 G
- 特定の分布に限定せず，独立性を仮定する一般の分布 ⋯ GI

- 最初の要素は，A の到着過程です．
- 到着過程は，客の到着の様子を，客の到着の時間間隔の分布としてモデル化します．
- 一番簡単なのは，客がランダムにやってくる場合で，到着の時間間隔は指数分布に従います．
- 指数分布の詳細は後で説明しますが，指数分布は無記憶性，すなわち memoryless，あるいはマルコフ性という性質を持つため，その頭文字をとって M という記号が当てられます．
- なお，到着の時間間隔が指数分布に従うことは，到着の頻度がポアソン分布に従うことを意味するので，到着過程を「客の到着頻度がポアソン分布に従う」,「客の到着がポアソン過程に従う」等と言う場合もあります．
- ポアソン分布についても後で説明します．
- 到着の時間間隔が一定時間の場合は，一定分布 に従います．
- 一定分布というのは，確率的ではなく決定的なので，deterministic の頭文字である D という記号が当てられます．
- 特定の分布に限定せず，独立性も仮定しない一般の分布，すなわち一般分布を考える場合は，general の頭文字である G という記号が当てられます．
- また，一般の分布を考えるが，客の到着に独立性を仮定する場合は，general と independent の頭文字をとって GI という記号が当てられます．

待ち行列システム

待ち行列システム

B サービス時間 サービスを提供する窓口において
サービスの処理に要する時間の分布

- 分布の種類により到着過程と同様の記号

C 窓口数 サービスを提供する窓口の数

K 系の容量 系に入れる客の最大数

- 窓口の数と待ち室の容量の和

N 客数の最大数 来店する可能性のある客数の最大値

- 2 番目の要素は B のサービス時間です.
- サービスを提供する窓口において，サービスの処理に要する時間の分布としてモデル化します.
- 分布の種類により到着過程と同様の記号を当てます.
- 3 番目の要素は C の窓口数です.
- サービスを提供する窓口の数で，1 以上の整数が当てられます.
- 4 番目の要素は K の，システム，すなわち系の容量です.
- 系に入れる客の最大数のことで，窓口の数と待ち室の容量の和となります.
- 系の容量は，1 以上の整数で，無限大を仮定することもあります.
- 5 番目の要素は N の客数の最大数です.
- 来店する可能性のある客数の最大値のことです.
- 1 以上の整数を当てます.
- 実際には有限の場合でも，無限大を仮定することもあります.

待ち行列システム

待ち行列システム

Z サービス規律 客にサービスをする順番

- 先着順 ··· FIFO (First In First Out)，
  または FCFS (First Come First Served)
- 後着順 ··· LIFO (Last In First Out)，
  または LCFS (Last Come First Served)
- その他

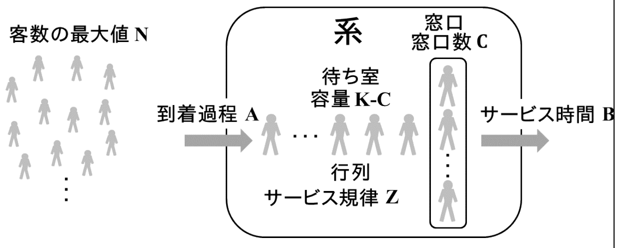
- 最後，6 番目の要素は Z のサービス規律です．
- 客にサービスをする順番のことで，最も代表的なものは，先着順である FIFO，あるいは FCFS と，後着順である LIFO，あるいは LCFS です．

待ち行列システム

ケンドールの記号

- A/B/C/K/N/Z

A 到着過程
B サービス時間
C 窓口数
K 系の容量
N 客数の最大数
Z サービス規律



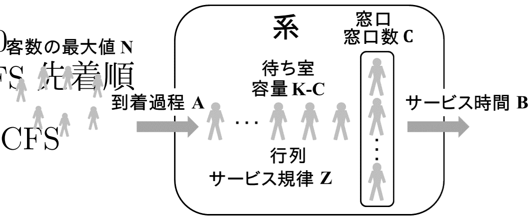
- 待ち行列システムを簡潔に記述するために「ケンドールの記号」が用いられます.
- ケンドールの記号は待ち行列システムの 6 つの要素をスラッシュで区切って記述します.

待ち行列システム

ケンドールの記号

- A/B/C/K/N/Z

A 到着過程	M 指数分布
B サービス時間	M 指数分布
C 窓口数	2
K 系の容量	10
N 客数の最大数	1000
Z サービス規律	FCFS 先着順



- M/M/2/10/1000/FCFS

- 例えば，客の到着の時間間隔が指数分布で M，サービス時間も M，窓口数が 2，系の容量が 10，客数の最大数が 1000，サービス規律が先着順の待ち行列システムは，ケンドールの記号で M/M/2/10/1000/FCFS と表します．

待ち行列システム

ケンドールの記号

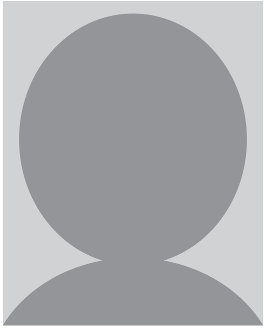
- A/B/C/K/N/Z

K 系の容量 ∞
N 客数の最大数 ∞
Z サービス規律 FCFS

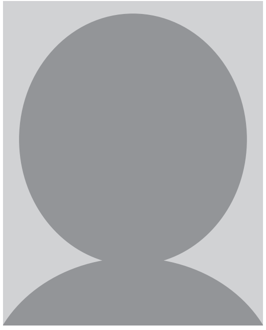
- $\mathrm{GI/G}/c = \mathrm{GI/G}/c/\infty/\infty/\mathrm{FCFS}$
- $\mathrm{A/B}/c(k-c) = \mathrm{A/B}/c/k$
- $\mathrm{A}(n)/\mathrm{B}/c(k-c) = \mathrm{A/B}/c/k/n$

- 6つの要素のうち，K, N, Z は省略可能です．
- システムの容量 K が省略された場合，容量は無限大，客数の最大数 N がが省略された場合，客数の最大数は無限大，サービス規律 Z が省略された場合は，先着順 FCFS であるとされます．
- $\mathrm{GI/G}/c$ は $\mathrm{GI/G}/c/\infty/\infty/\mathrm{FCFS}$ のことです．
- また，$\mathrm{A/B}/c/k$ を，窓口の数 c と待ち室の容量 $k-c$ を用いて，$\mathrm{A/B}/c(k-c)$ と書くことがあります．
- また，客数の最大数 n を到着過程 A とセットにして，
  $\mathrm{A/B}/c/k/n$ を，
  $\mathrm{A}(n)/\mathrm{B}/c(k-c)$ と表すこともあります．

ポアソン分布と指数分布



- 待ちを分析するには，客の来店や電話がかかってくる等の事象をモデル化する必要があります.
- また，窓口での対応・処理時間や通話時間等のサービスの事象をモデル化する必要もあります.
- これらの事象のモデル化には，どれくらいの頻度で事象が起こるか，あるいはどのくらいの時間間隔で事象が起こるかに注目し，確率モデルとしてモデル化します.



- 最も簡単なモデルは，事象がランダムに起こるというものです．
- ここでは，事象がランダムに起こる場合の確率モデルについて説明します．
- 今回は，一貫して，微小時間での事象の生起，状態の変化という観点から待ち行列システムを考えていきます．
- そこで，ポアソン分布や指数分布についても同様の観点から導いていきます．

ポアソン分布と指数分布

ポアソン過程（ポアソン到着）

定常性 事象が起こる確率はどの時間帯でも同一

無記憶性 任意の時間区間 $(t_0, t_0 + t)$ に k 回の事象が起こる確率は，時刻 t_0 以前の事象が起こった回数に依存しない

希少性 微小時間 Δ の間に事象が 2 回以上起こる確率は $o(\Delta)$ … 無視できるほど小さい

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$$

- 事象がランダムに起こるとして，事象が起こる頻度に着目します．
- ポアソン過程は，これから説明する定常性，無記憶性，希少性を満たす，事象の確率過程モデルです．
- まず，定常性は，事象が起こる確率は，どの時間帯でも同一であるという性質です．
- ある時は事象が起こりやすく，ある時は起こりにくいという傾向がないということです．
- 二番目の無記憶性は，任意の時間区間，ここでは t_0 から $t_0 + t$ までととしましょう．
- この時間区間に k 回の事象が起こる確率は，時刻 t_0 以前の事象が起こった回数に依存しないという性質です．
- t_0 までに事象が多数起きたので，その後の t_0 から $t_0 + t$ までには，事象は「もうあまり起こらない」といったことはない，過去に事象が起きた回数は，これから事象が起きる回数には影響しないということです．
- 三番目の希少性は，微小時間 Δ の間に事象が 2 回以上起こる確率はスモールオー・デルタであるというものです．
- スモールオー・デルタとは，下の式を満たす Δ の関数で，例えば Δ の二乗はこの性質を満たします．
- 要するに，スモールオー・デルタとは Δ が小さい時には無視できるほど小さいという意味です．

ポアソン分布と指数分布

ポアソン過程（ポアソン到着）

- 時刻 0 から t までに事象が n 回起こる確率 $\cdots$ $P_n(t)$
- 微小時間 Δ に事象が 1 回起こる確率を $\lambda\Delta$ とする

$$P_n(t+\Delta) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta) + P_n(t)(1-\lambda\Delta)$$

- 時刻 t までの発生数が $n-1$ 回で，それから Δ の間にさらに 1 回起こる
- 時刻 t までの発生数が n 回で，それから Δ の間にさらに事象が起こらない

- 以上の三つの性質を満たすとします．
- 時刻 0 から t までに事象が n 回起こる確率を $P_n(t)$ と書くことにします．
- また，微小時間 Δ に事象が 1 回起こる確率を $\lambda\Delta$ とします．
- 時刻 0 から $t+\Delta$ までに事象が n 回起こるのは，次の二つの場合が考えられます．
- 一つは，時刻 t までの発生数が $n-1$ 回で，それから Δ の間にさらに 1 回起こる場合です．
- もう一つは，時刻 t までの発生数が n 回で，それから Δ の間に事象が起こらない場合です．
- 時刻 t までの発生数が $n-2$ 回以下で，それから Δ の間に事象が 2 回以上起こる確率はスモールオー・デルタで無視されるほど小さいので，先の二つの場合しかありません．
- 以上のことから，時刻 0 から $t+\Delta$ までに事象が n 回起こる確率，$P_n(t+\Delta)$ はこの式で表されます．
- この式の右辺の第 1 項は，一つ目の場合に相当します．
- 時刻 t までの発生数が $n-1$ 回の確率は，$P_{n-1}(t)$ です．
- それから Δ の間に事象が 1 回起こる確率は $\lambda\Delta$ です．
- したがって，時刻 t までに事象が $n-1$ 回起こり，それから Δ の間にさらに 1 回起こる確率はこれらを掛け合わせたものになります．
- この式の右辺の第 2 項は，二つ目の場合に相当します．
- 時刻 t までの発生数が n 回の確率は，$P_n(t)$ です．
- それから Δ の間に事象が 1 回起こる確率は $\lambda\Delta$ ですから，事象が行らない確率は $1-\lambda\Delta$ です．
- したがって，時刻 t までに事象が n 回起こり，それから Δ の間に事象が起こらない確率はこれらを掛け合わせたものになります．

ポアソン分布と指数分布

$$P_n(t+\Delta) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta) + P_n(t)(1-\lambda\Delta)$$

$$\Downarrow \text{変形}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta) - P_n(t)}{\Delta} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t))$$

$\Delta \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t)) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 次に，得られた式を移行して，両辺を Δ で割ると，このような式になります．
- 左辺の Δ を 0 に限りなく近づけると，微分の定義からこのような微分方程式が得られます．

ポアソン分布と指数分布

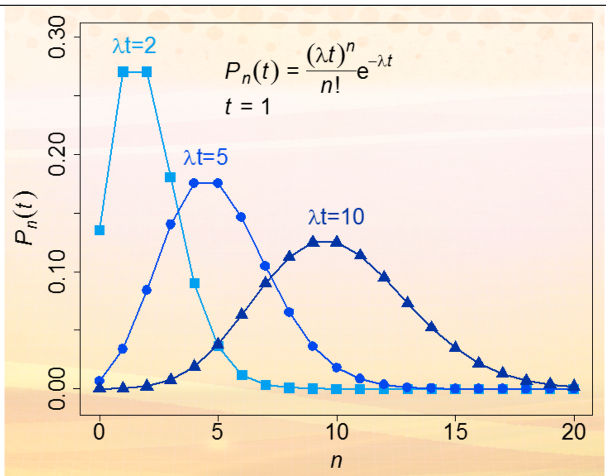
$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t)) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ただし，$P_{-1} = 0$ を解くと，

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$\cdots$ **ポアソン分布**

- この微分方程式の解法の詳細は，印刷教材にありますが，$n = 0$ の場合から逐次解いていくことにより，この式に示すような解が得られます．
- この式で表される分布がポアソン分布です．
- 復習ですが，時刻 0 から時刻 t の間で，言い換えると，時間間隔 t の間に事象が n 回起きる確率が，この式で表される，$P_n(t)$ です．
- ポアソン分布がどのような関数になるかグラフにしてみましょう．



- ここでは，t を 1 に固定します．
- 横軸は時間間隔 1 の間に事象が起きる回数 n で，縦軸は事象が起きる回数が n である確率です．
- λ が 2 の場合，5 の場合，10 の場合を示してあります．
- グラフを見ますと，n が λt 付近の時に確率が一番大きくなっています．
- 統計学の用語でいえば，モードとか，最頻値と呼ばれる値が，λt 付近の値になっている…ということです．

- 実際，$\lambda t = 2$ の場合には，n が 1 と 2 の時に確率が一番大きく，
- $\lambda t = 5$ の場合には，n が 4 と 5 の時に確率が一番大きく，
- $\lambda t = 10$ の場合には，n が 9 と 10 の時に確率が一番大きくなっています．

ポアソン分布と指数分布

ポアソン分布

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 時間間隔 t の間に起こる事象の回数の平均値，分散はともに λt
- λ … 生起率（到着率）

- ポアソン分布の平均，分散に注目すると，時間間隔 t の間に起こる事象の回数の平均値，分散はともに λt となります．
- λ のことを生起率と呼びます．
- 待ち行列の文脈では到着率と呼びます．
- 平均と分散の導出については，印刷教材をご覧下さい．

ポアソン分布と指数分布

1時間当たり平均2.5人のポアソン分布に従う客の来店がある店で，2時間の間に来店する客が2人以下である確率を求めよ．

- ポアソン分布の例題を示しておきましょう．
- 1時間当たり平均2.5人のポアソン分布に従う客の来店がある店で，2時間の間に来店する客が2人以下である確率を求めよ，…という問題です．

ポアソン分布と指数分布

1 時間当たり平均 2.5 人のポアソン分布に従う客の来店がある店で，2 時間の間に来店する客が 2 人以下である確率を求めよ

- 到着率 λ は 2.5(人/時間)，時間 t は 2 時間，$\lambda t = 5$ (人)
- 2 時間の間に来店する客が 2 人以内である確率

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{2} \frac{5^n}{n!} e^{-5} = \frac{5^0}{0!} e^{-5} + \frac{5^1}{1!} e^{-5} + \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0.125$$

- 到着率 λ は 1 時間当たり 2.5 人で，時間間隔 t は 2 時間ですから，λt は 5 人です．
- すなわち，2 時間で平均来客数は 5 人です．
- この店で，2 時間の来客数が 2 人以下の確率は，来客が 0 人の確率，来客が 1 人の確率，来客が 2 人の確率，の合計で，0.125 となります．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

- ポアソン分布に従い事象が起こる時，事象が起きてから次に事象が起きるまでの時間間隔 $\cdots$ $f(t)$
- 時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率 $\cdots$ $f(t)\Delta$
- 時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率
  = 時刻 t まで事象が起こらず，その後 Δ の間に
  事象が起こる確率

$$\left(1-\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\lambda\Delta)$$

- 今度は，ポアソン分布にしたがい事象が起こる時に，事象が起きてから次に事象が起きるまでの時間間隔を考えます．
- 事象が起きた時刻を 0 として，時刻 t において事象が次に起きる確率密度関数を $f(t)$ とします．
- Δ を微小時間とし，時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率は，確率密度の定義から $f(t)$ と Δ の積になります．
- また，時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率とは，時刻 t まで事象が起こらず，その後 Δ の間に事象が起こる確率のことです．
- 時刻 t まで事象が起こらない確率は，この式のようになります．
- その後 Δ の間に，事象が起こる確率は，$\lambda\Delta$ になります．
- したがって，時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率は，これらの積となります．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

$$f(t)\Delta = \left(1 - \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\lambda\Delta)$$

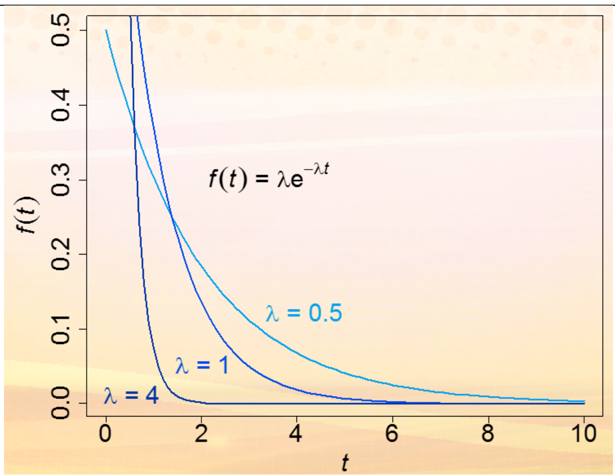
両辺を Δ で割って，t で微分

$$f(t)' = -\lambda f(t)$$

微分方程式を解くと，

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \cdots \text{ 指数分布}$$

- 時刻 t から $t+\Delta$ の間に事象が起こる確率を 2 種類の方法で表しましたが，これらの値は等しくなりますので，このような方程式が成り立ちます.
- この式の両辺を Δ で割って，t で微分すると，このような微分方程式が得られます.
- この微分方程式を解くと，このような式で表される指数分布が得られます.



- 指数分布のグラフを示します．
- 横軸は時間 t で縦軸は確率密度です．
- λ が 0.5, 1, 4 の場合を示しています．
- $t = 0$ の時に，確率密度が一番大きく，t に対して単調減少しています．
- そして，λ が小さいほど，傾きが緩やかになっています．
- これは，事象の生起率 λ が小さい，すなわち発生頻度が小さいと，事象発生の時間間隔が長くなることを反映しています．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

- 平均値 $1/\lambda$
- 　分散 $1/\lambda^2$

- 指数分布の値は，時間間隔 t が 0 より小さい時には 0 となります．
- 指数分布の平均値は $1/\lambda$，分散は $1/\lambda^2$ となります．
- 一つ例題を示します．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

1 時間当たり平均 6 人のポアソン分布に従う客の来店がある店における，客の到着の時間間隔の平均値を求めよ

- 1 時間当たり平均 6 人のポアソン分布に従う客の来店がある店における，客の到着の時間間隔の平均値を求めよ，…という問題です．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

1 時間当たり平均 6 人のポアソン分布に従う客の来店がある店における，客の到着の時間間隔の平均値を求めよ

- $\lambda = 6$
- 時間間隔の平均値は $1/\lambda$
- 平均時間間隔は 1/6(時間)

- 1 時間当たり平均 6 人のポアソン到着ということで，$\lambda = 6$ となります．
- 客の到着の時間間隔は，平均値 $1/\lambda$ の指数分布に従いますから，時間間隔の平均値は 1/6 時間，すなわち 10 分となります．
- 1 時間に平均 6 人が到着するのですから，到着する時間間隔が 1/6 時間というのは直観的な結果と言えるでしょう．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

- 平均値 $1/\lambda$ の指数分布に従う確率変数 T が t より大きくなる確率
  $\Longrightarrow$ 事象間の時間間隔が t より大きくなる確率

$$P(T > t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau = e^{-\lambda t}$$

- 次に，指数分布の無記憶性について見てみましょう．
- 平均値 $1/\lambda$ の指数分布にしたがう確率変数ラージ T が t より大きくなる確率，すなわち事象間の時間間隔が t より大きくなる確率は，確率密度と確率分布の関係から，この式のようになります．

ポアソン分布と指数分布

指数分布

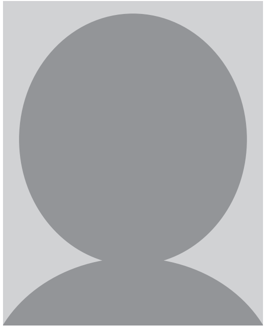
- 事象間の時間間隔が t より大きくなる確率

$$P(T > t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau = e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(T > t+s | T > t) &= \frac{P(T > t+s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \\ &= P(T > s) \end{aligned}$$

- 次に，確率変数ラージ T が t より大きいことが分かっていて，$t+s$ より大きくなる確率，すなわち，ラージ $T > t$ を所与とする，ラージ $T > t \quad +s$ の条件付き確率を求めます．
- そうしますと，下の式のように，スモール t がなく，s だけの式になります．
- すなわち，スモール t の値には依存しないということになります．
- これは，次に事象が起こるまでの時間は，それまでにどれだけの時間，事象が起こらなかったかに依存しないということです．
- これが，無記憶性，あるいはマルコフ性と呼ばれる性質です．
- 例えば，街中でタクシーを待つ場合，待ち始めからタクシーに乗るまでの待ち時間も，待ち始めてから 10 分経ってもタクシーが来ないで，その時点からタクシー乗るまでの待ち時間も待ち時間の分布は変わらないということになります．
- 「もう，随分待ったので，そろそろ来るんじゃないか」と思いがちですが，これまでどれだけ待ったかは関係がないということです．

M/M/1 システム



- M/M/c システムは，客の到着がポアソン過程で，サービス時間が指数分布に従い，サービスの窓口が c 個あり，待ち室の容量は無制限で，先着順 FCFS の待ち行列システムです．
- M/M/c システムは最も基本的な待ち行列システムで，理論解析が可能なことから，待ち行列理論を理解する上で重要なモデルです．
- ここでは，M/M/c システムの中でも，窓口が 1 つだけの M/M/1 システムについて考えます．

M/M/1 システム

- 窓口が 1 個の最も単純な M/M/c システム
- 客の到着は生起率 λ のポアソン分布
- サービス時間は平均 $1/\mu$ の指数分布
- 単位時間当たり，平均 λ(人) の客が到着，
平均 μ(人) 分のサービスが完了
- どのような行列の様子（確率分布）になるか？

- M/M/1 システムはサービスの窓口が 1 個の最も単純な M/M/c システムです．
- 客の到着は生起率 λ のポアソン分布，サービス時間は平均 $1/\mu$ の指数分布に従うとします．
- 単位時間当たり平均 λ(人) の客が到着し，単位時間当たり平均 μ(人) 分のサービスが完了します．
- この待ち行列システムで，系内の客数や待ち時間等の分布や特徴を調べます．

M/M/1 システム

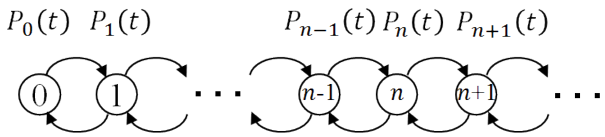
トラフィック強度

- $a = \lambda/\mu$
- $a \geq 1$　サービス処理が客の到着に追い付かない
$\rightarrow$ 待ち行列が発散
- $a < 1$　待ち行列は発散せず，十分な時間が経過
$\rightarrow$ 系内の客数の分布は一定（定常状態）
- $a < 1$ の場合を考える

- このとき，$a = \lambda/\mu$ をトラフィック強度と呼びます．
- a が 1 以上だと，サービス処理が客の到着に追い付かず，待ち行列が発散してしまいます．
- a が 1 より小さければ，待ち行列は発散せず，系内の客数の分布は一定，すなわち定常状態になります．
- ここで，注意していただきたいのは，定常状態とは，系内の客数の分布が一定になることであり，客数が一定になる訳ではないことです．
- 待ち行列が発散しない，a が 1 より小さい場合を考えます．

M/M/1 システム

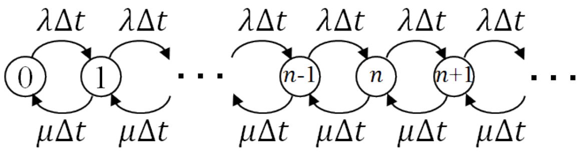
- 時刻 t に，系内に客が n (人) いる確率
  $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態



- 時刻 t に，系内に客が n (人) いる確率を $P_n(t)$ とします.
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態について考えます.

M/M/1 システム

- 時刻 t に，系内に客が n (人) いる確率
  $P_n(t)\ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

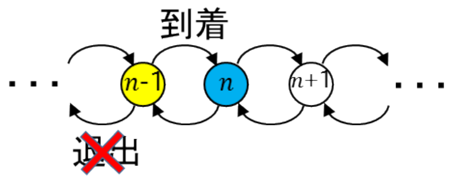


- 微小時間 Δ の間に客が 1 人到着する確率は $\lambda\Delta$ です．
- 微小時間 Δ の間にサービス処理が終わり，客が 1 人退出する確率は $\mu\Delta$ です．
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) 状態は，次の 3 つの場合だけです．

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  1. 時刻 t に，系内の客は $n-1$ (人) で，
     その後 Δ の間に，1 人客が到着，客の退出はなし



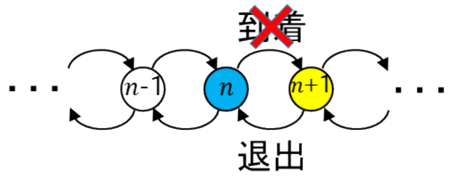
$$P_{n-1}(t)\,(\lambda\Delta)$$

- 一つ目は，時刻 t には，系内の客数が $n-1$ 人で，その後 Δ の間に，1 人客が到着し，サービス処理が終了して退出する客はいない場合です．
- その確率は，時刻 t に系内の客数が $n-1$ である確率 $P_{n-1}(t)$，Δ の間に客が到着する確率 $\lambda\Delta$，それから Δ の間に客が退出しない確率 $1-\mu\Delta$，の積になります．
- Δ の 2 乗の項は，スモールオー・デルタなので無視すると，この式になります．

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  2. 時刻 t に，系内の客は $n+1$ (人) で，
  その後 Δ の間に，客が 1 人退出し，客の到着はなし



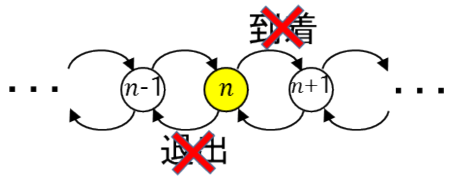
$$P_{n+1}(t)\,(\mu\Delta)$$

- 二つ目は，時刻 t には，系内の客数が $n+1$ 人で，その後 Δ の間に，1 人の客のサービス処理が終了して退出し，客は到着しない場合です．
- その確率は，時刻 t に系内の客数が $n+1$ である確率 $P_{n+1}(t)$，Δ の間にサービス処理が終了して，客が退出する確率 $\mu\Delta$，それから Δ の間に客が到着しない確率 $1-\lambda\Delta$，の積になります．
- Δ の 2 乗の項は，スモールオー・デルタなので無視すると，この式になります．

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  3. 時刻 t に，系内の客は n (人) で，
     その後 Δ の間に，客の到着も客の退出もなし



$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-\mu\Delta)$$

- 三つ目は，時刻 t には，系内の客数が n 人で，その後 Δ の間に，客の到着も退出もない場合です．
- その確率は，時刻 t に系内の客数が n である確率 $P_n(t)$，Δ の間に客が到着しない確率 $1-\lambda\Delta$，Δ の間に客が退出しない確率 $1-\mu\Delta$ の積になります．
- Δ の 2 乗の項は，スモールオー・デルタなので，無視すると，この式になります．

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n(人) いる状態

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

- 以上の三つの場合を合わせせると，時刻 $t+\Delta$ において，系内に客が n 人いる確率 $P_n(t+\Delta)$ は，この式で表されます．

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n(人) いる確率

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

$$
P_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)P_0(t) + (\mu\Delta)P_1(t)
$$

- $n=0$ の場合は，$n-1$ の状態がないので，下の式のようになります．

M/M/1 システム

$$\left.\begin{array}{rcl} P_0(t+\Delta) & = & (1-\lambda\Delta)P_0(t)+(\mu\Delta)P_1(t) \\ P_n(t+\Delta) & = & (\lambda\Delta)P_{n-1}(t)+(1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\ & & +(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{P_0(t+\Delta)-P_0(t)}{\Delta} & = & -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \\ \frac{P_n(t+\Delta)-P_n(t)}{\Delta} & = & \lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t) \\ & & \hfill (n=1,2,\cdots) \end{array}\right\}$$

- これらの式を移項して，両辺を Δ で割ると，下の式のようになります．

M/M/1 システム

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{P_0(t+\Delta)-P_0(t)}{\Delta} & = & -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{P_n(t+\Delta)-P_n(t)}{\Delta} & = & \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \\ & & \qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

$\Delta \to 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} & = & -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} & = & \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \\ & & \qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

- この式の Δ を限りなく 0 に近づけると，下のような微分方程式が得られます．

M/M/1 システム

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} & = & -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} & = & \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \\ & & \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

一定の分布（定常状態）$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ になるとする

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{n-1} - (\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

- この微分方程式は，先ほどポアソン分布を導出した時の微分方程式と似ているのですが，そのまま解くことは難しいので，時間が十分経って定常状態になった時の挙動を調べることにします．
- 時間が十分経つと，$P_n(t)$ は一定の分布 P_n になるとします．
- 定常状態になると分布の時間変化はなくなりますから，微分方程式の左辺を 0 と置きます．
- そうすると，下のような方程式が得られます．

M/M/1 システム

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{n-1} - (\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rl} P_1 & = \rho P_0 \\ P_{n+1} & = (1+\rho)P_n - \rho P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

$\rho = \lambda/\mu$ $\cdots$ 利用率

- 先ほど，μ分のλをトラフィック強度aとしましたが，aを窓口の数で割った値を「利用率」ρと呼びます
- M/M/1 システムの場合，トラフィック強度と利用率は同じ値になりますが，他のシステムと共通した表記になるように，ここでは利用率ρを用います．

M/M/1 システム

$$\left.\begin{array}{ll} P_1 & = \rho P_0 \\ P_{n+1} & = (1+\rho)P_n - \rho P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\}$$

$\rho = \lambda/\mu$
$n = 1$ から順次適用すると

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = \frac{P_0}{1-\rho} = 1$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

- この方程式を $n = 1$ の場合から解いていきます.
- まず，$P_1 = \rho \times P_0$ であることから，これを 2 番目の式に代入すると，$P_2 = \rho P_1$ となります.
- 順次解いていきますと，$P_n = \rho^n P_0$ が得られます.
- P_n は確率ですから，P_n の総和は 1 になることから，P_0 が決まり，P_n は下の式のようになります.
- この分布は幾何分布と呼ばれます.

M/M/1 システム

ATM が 1 台のみの ATM コーナーでは，1 時間当たり平均 20 人のポアソン分布に従い客が到着する．ATM の使用は 1 件当たり平均 2 分の指数分布に従う．系内の客数の定常分布を求めよ．

- 例題を一つ示しておきます．
- ATM が 1 台のみの ATM コーナーでは，1 時間当たり平均 20 人のポアソン分布に従い客が到着する．
- ATM の使用は 1 件当たり平均 2 分の指数分布に従う．
- この ATM コーナー，すなわち系内の客数の定常分布を求めよ…という問題です．

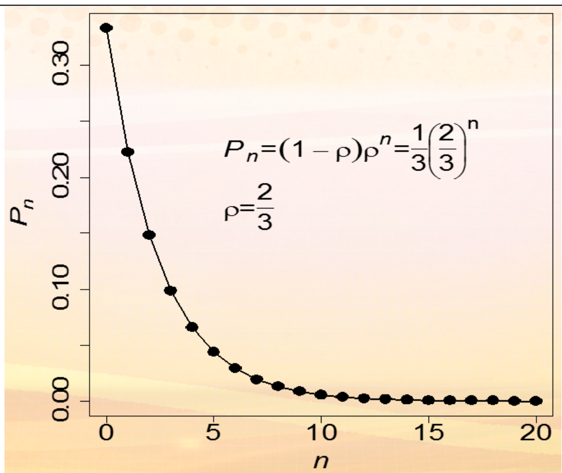
M/M/1 システム

ATM が 1 台のみの ATM コーナーでは，1 時間当たり平均 20 人のポアソン分布に従い客が到着する．ATM の使用は 1 件当たり平均 2 分の指数分布に従う．系内の客数の定常分布を求めよ．

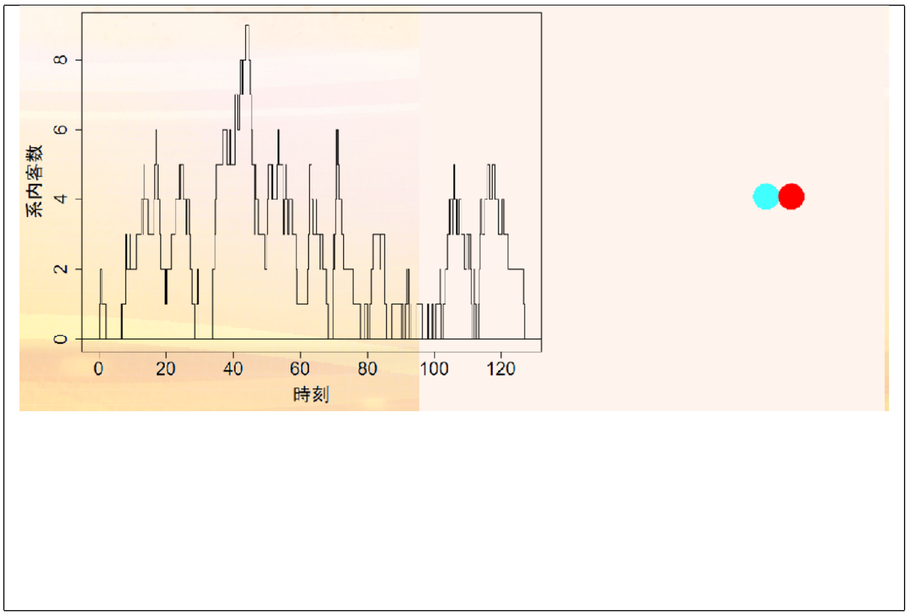
$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \mu = 1/2,\ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- まず，到着率 λ は，1 時間当たり 20 人の来客ですから，$20/60 = 1/3$ となります．
- また，サービス時間は平均 2 分の指数分布に従いますので，μ はその逆数で $1/2$ となります．
- ρ は $\lambda/\mu = 2/3$ となります．
- そうしますと，系内に客が n 人いる確率 P_n は下の式で示される幾何分布になります．



- この幾何分布をグラフにすると，このようになります．
- 横軸は系内の客数で，縦軸はその確率です．
- 客数は 0 の確率が一番大きく，客数が増えるほど確率は小さくなります．



- 客の到着と退出による系内の客数の変化の様子を見るために，乱数を用いたシミュレーションを行ってみました．
- 先ほどの ATM の例で，$\lambda = 1/3$, $\mu = 1/2$ の M/M/1 システムです．
- 100 人の客の到着・サービス処理するまでをシミュレートしています．
- 右側のアニメーションでは，丸が 1 人の客を表しています．
- 右端の赤い丸が窓口でサービスを受けている客で，それ以外の青い丸は待ち室でサービスを待っている客です．
- シミュレーションの最初と最後以外は，定常状態とみなせますが，定常状態でも，客数はかなり増減していることが分かります．
- 左のグラフは，横軸が時刻，縦軸が系内の客数を表しています．
- やはり，系内の客数はかなり増減して，最大で 9 人になっていることが分かります．

M/M/1 システム

定常状態における系内の平均客数

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ここで,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

- M/M/1 システムの定常分布が得られましたので，今度は，定常状態における，系内の平均客数や平均待ち時間といった特性値を算出してみましょう.
- まず，系内の平均客数 L を求めます.
- 客数の期待値を求める訳ですから，n と P_n の積の総和を求めると，L は $1-\rho$ 分の ρ となります.

M/M/1 システム

定常状態における系内の平均滞在時間

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{L+1}{\mu} = \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

- 次に，客が到着してから，順番を待って，サービスを受けて退出するまでの時間の平均値，すなわち系内の平均滞在時間 W を求めます．
- 客が到着した時，系内に先客が n 人いたとします．
- 1 人当たりの平均サービス時間は $1/\mu$ ですから，$n \times (1/\mu)$ だけ待たされて，自身がサービスを受ける平均時間は $1/\mu$ です．
- したがって，先客が n 人いた時に，客が到着してから退出するまでの平均時間は $(n+1)/\mu$ となります．
- したがって，系内の平均滞在時間 W は $(n+1)/\mu$ に P_n をかけた総和で，この式のようになります．

M/M/1 システム

リトルの公式

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{L+1}{\mu} = \frac{1}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W$$

- ここで，系内の平均客数 L と系内の平均滞在時間 W を比較しますと，$L = \lambda W$ という関係が成り立ちます．
- この関係は，リトルの公式と呼ばれ，M/M/1 システムに限らず，すべての待ち行列システムについて成り立ちます．

M/M/1 システム

定常状態における待ち室内の平均客数

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \rho\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1} \\
&= \rho\sum_{n=0}^{\infty}nP_n = \rho L = \frac{\rho^2}{1-\rho} = L - \rho
\end{aligned}
$$

- 次に，待ち室内の平均客数 L_q，つまり行列の平均長を求めます．
- 系内に客が n 人いる時には，1 人がサービスを受けているので，待ち室内には $n-1$ 人の客がいますので，$n-1$ と P_n の積の総和を求めると， L_q はこの式のようになります．

M/M/1 システム

定常状態における平均待ち時間

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n}{\mu} = \frac{L}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = W - \frac{1}{\mu}$$

- 次に，平均待ち時間 W_q，すなわち待ち室内での平均滞在時間を求めます．
- 客が到着した時，系内に先客が n 人いたとします．
- 1 人当たりの平均サービス時間は $1/\mu$ ですから，$n \times (1/\mu)$ だけ待たされます．
- 平均待ち時間 W_q は n/μ に P_n をかけた総和で，この式のようになります．

M/M/1 システム

リトルの公式

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \rho\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1} \\
&= \rho\sum_{n=0}^{\infty}nP_n = \rho L = \tfrac{\rho^2}{1-\rho} = L - \rho
\end{aligned}
$$

$$
W_q = \sum_{n=0}^{\infty}P_n\frac{n}{\mu} = \frac{L}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = W - \frac{1}{\mu}
$$

$$
L_q = \lambda W_q
$$

- ここで，待ち室内の平均客数 L_q と平均待ち時間 W_q を比較しますと，$L_q = \lambda\ W_q$ という関係が成り立ちます.
- つまり，待ち室内においてもリトルの公式が成り立ちます.

M/M/1 システム

ATM が 1 台のみの ATM コーナーでは，1 時間当たり平均 20 人のポアソン分布に従い客が到着する．ATM の使用は 1 件当たり平均 2 分の指数分布に従う．コーナー内の平均客数，平均滞在時間，待ち行列の平均長，平均待ち時間を求めよ．

$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \mu = 1/2,\ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

- ここでも，一つ例題を示しておきます．
- 先ほどと同じ ATM コーナーで，コーナー内の平均客数，平均滞在時間，待ち行列の平均長，平均待ち時間を求めよ…と言う問題です．
- 先ほどと同様，$\lambda = 1/3$, $\mu = 1/2$, $\rho = 2/3$ となります．

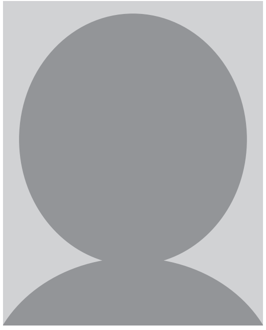
M/M/1 システム

$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \mu = 1/2,\ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

$$\begin{aligned} L &= \rho/(1-\rho) = (2/3)/(1-2/3) = 2 \\ W &= \frac{1}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1-2/3}\times\frac{1}{1/2} = 6 \\ L_q &= \rho^2/(1-\rho) = (2/3)^2/(1-2/3) = 4/3 \\ W_q &= \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = (2/3)/(1-2/3)\times(1/(1/2)) = 4 \end{aligned}$$

- まず，系内の平均客数 L を求めます．
- L は $1-\rho$ 分の ρ ですから，$\rho = 2/3$ を代入すると L は 2 となります．
- 次に，平均滞在時間 W を求めます．
- W は $1-\rho$ 分の 1 と $1/\mu$ の積ですから，$\rho = 2/3$ と $\mu = 1/2$ を代入すると W は 6 となります．
- ここで，$\lambda = 1/3$ ですから，リトルの公式 $L = \lambda W$ が成り立っていることが確認できます．
- 次に，待ち室内の平均客数，すなわち行列の長さの平均値 L_q を求めます．
- L_q は $1-\rho$ 分の ρ^2 ですから，$\rho = 2/3$ を代入すると L_q は 4/3 となります．
- 次に，平均待ち時間 W_q を求めます．
- W_q は $1-\rho$ 分の ρ と $1/\mu$ の積ですから，$\rho = 2/3$ と $\mu = 1/2$ を代入すると W_q は 4 となります．
- ここで，$\lambda = 1/3$ ですから，待ち室内においてもリトルの公式 $L_q = \lambda W_q$ が成り立っていることが確認できます．

M/M/c システム



- 今度は，窓口の数が c の M/M/c システムについて考えます.
- 窓口の数が c でも，M/M/1 システムと考え方は同じです.
- 客は 1 列で並んでサービスを待ち，最初に空いた窓口でサービスを受けます.

M/M/c システム

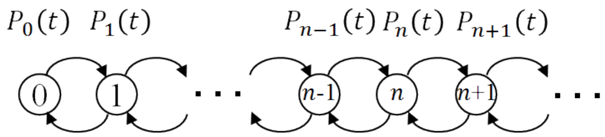
トラフィック強度と利用率

- $a = \lambda/\mu$ ⋯ トラフィック強度
- $\rho = \lambda/(c\mu)$ ⋯ 利用率
- $\rho \geq 1$　サービス処理が客の到着に追い付かない
  $\to$ 待ち行列が発散
- $\rho < 1$　待ち行列は発散せず，十分な時間が経過
  $\to$ 系内の客数の分布は一定（定常状態）
- $\rho < 1$ の場合を考える

- ここでも，待ち行列が発散しない，すなわち，$\rho < 1$ の場合を考えることにします．

M/M/c システム

- 時刻 t に，系内に客が n (人) いる確率
  $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

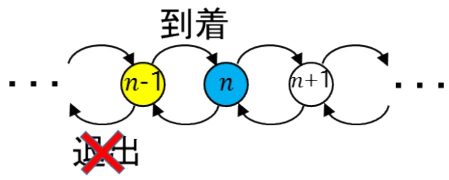


- 時刻 t に，系内に客が n (人) いる確率を $P_n(t)$ とします．
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態について考えます．
- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) 状態は，次の 3 つの場合だけです．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  1. 時刻 t に，系内の客は $n-1$ (人) で，
     その後 Δ の間に，1 人客が到着，客の退出はなし



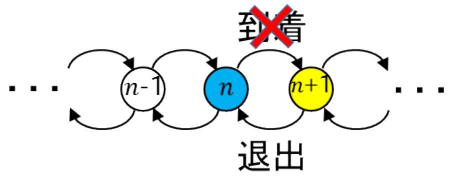
$$P_{n-1}(t)\,(\lambda\Delta)$$

- 一つ目は，時刻 t には，系内の客数が $n-1$ 人で，その後 Δ の間に，1 人客が到着し，サービス処理が終了して退出する客はいない場合です．
- その確率は，時刻 t に系内の客数が $n-1$ である確率 $P_{n-1}(t)$ と，Δ の間に客が到着する確率 $\lambda\Delta$ の積になります．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  2. 時刻 t に，系内の客は $n+1$ (人) で，
     その後 Δ の間に，客が 1 人退出し，客の到着はなし



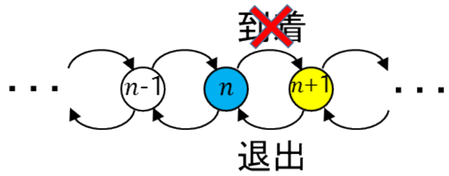
$$P_{n+1}(t)\,((n+1)\mu\Delta) \qquad (n=0,1,\cdots,c-1)$$

- 二つ目は，時刻 t には，系内の客数が $n+1$ 人で，その後 Δ の間に，1 人の客のサービス処理が終了して退出し，客は到着しない場合です．
- 系内の客数 $n+1$ が窓口数 c 以下であれば，客は全員窓口でサービスを受けていますので，Δ の間に客が退出する確率は，$(n+1)\times\mu\Delta$ となります．
- したがって，n が c より小さい場合，時刻 $t+\Delta$ に系内の客数が n になる確率は，時刻 t に系内の客数が $n+1$ である確率 $P_{n+1}(t)$ と，Δ の間にサービス処理が終了して，客が退出する確率 $(n+1)\mu\Delta$ の積になります．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

    2. 時刻 t に，系内の客は $n+1$ (人) で，
    その後 Δ の間に，客が 1 人退出し，客の到着はなし



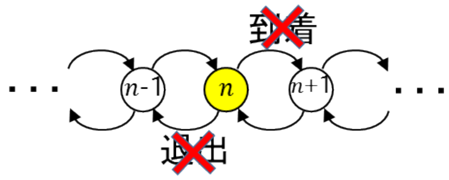
$$P_{n+1}(t)\,(c\mu\Delta) \qquad (n = c, c+1, \cdots)$$

- 系内の客数 $n+1$ が窓口数 c より多ければ，窓口でサービスを受けている客は c 人なので，Δ の間に客が退出する確率は，$c \times \mu\Delta$ となります．
- したがって，n が c 以上の場合，時刻 $t+\Delta$ に系内の客数が n になる確率は，時刻 t に系内の客数が $n+1$ である確率 $P_{n+1}(t)$ と，Δ の間にサービス処理が終了して，客が退出する確率 $c\mu\Delta$ の積になります．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  3. 時刻 t に，系内の客は n (人) で，
     その後 Δ の間に，客の到着も客の退出もなし



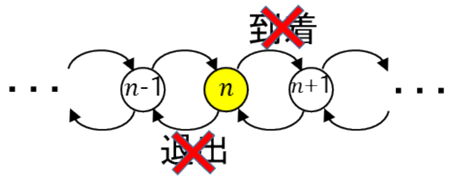
$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-(n+1)\mu\Delta) \qquad (n=0,1,\cdots,c-1)$$

- 三つ目は，時刻 t には，系内の客数が n 人で，その後 Δ の間に，客の到着も退出もない場合です．
- n が c より小さい場合，時刻 $t+\Delta$ に系内の客数が n 人である確率は，時刻 t に系内の客数が n である確率 $P_n(t)$，Δ の間に客が到着しない確率 $1-\lambda\Delta$，Δ の間に客が退出しない確率 $1-(n+1)\times\mu\Delta$ の積になります．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  3. 時刻 t に，系内の客は n (人) で，
     その後 Δ の間に，客の到着も客の退出もなし



$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-c\mu\Delta) \qquad (n=c,c+1,\cdots)$$

- n が c 以上の場合，時刻 $t+\Delta$ に系内の客数が n 人である確率は，時刻 t に系内の客数が n である確率 $P_n(t)$，Δ の間に客が到着しない確率 $1-\lambda\Delta$，Δ の間に客が退出しない確率 $1-c\times\mu\Delta$ の積になります．

M/M/c システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n(人) いる確率

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +((n+1)\mu\Delta)P_{n+1}(t) \quad (n=1,2,\cdots,c-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +(c\mu\Delta)P_{n+1}(t) \quad (n=c,c+1,\cdots)
\end{aligned}
$$

$$
P_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)P_0(t) + (\mu\Delta)P_1(t)
$$

- 以上の三つの場合を合わせると，時刻 $t+\Delta$ において，系内に客が n 人いる確率 $P_n(t+\Delta)$ は，これらの式で表されます．
- 系内の客数が窓口の数以下で，客全員が窓口にいる場合と，客数が窓口の数より多く，待ち室にも客がいる場合で，分けて考えるところがポイントです．
- ここから先も，M/M/1 システムの場合と同様の方法で，定常分布を求めます．
- すなわち，これらの式から微分方程式を導き，十分時間が経った後は分布が時間変化しないとして，定常状態分布 P_n を求めます．
- M/M/1 システムに比べると，導出の過程で出てくる式は複雑になりますが、考え方は同じです。

M/M/c システム

定常分布

$$
\left.
\begin{array}{l}
P_0 = \left\{ \displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1} \\
P_n = \begin{cases} \frac{a^n}{n!} P_0 & (n = 1, \cdots, c) \\ \frac{a^n}{c^{n-c} c!} P_0 & (n = c+1, c+2, \cdots) \end{cases} \\
a = \frac{\lambda}{\mu}, \ \rho = \frac{\lambda}{c\mu}
\end{array}
\right\}
$$

- 定常分布の式を示しておきます．
- M/M/1 システムと比較すると，定常分布の式もかなり複雑になりますが，式を暗記する必要はありません．

M/M/c システム

- M/M/c システムにおいて，c 個の窓口が
すべてふさがっている確率 $C(c,a)$

$$
\begin{aligned}
C(c,a) &= \sum_{n=c}^{\infty} P_n = \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{n-c} P_c = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{n} P_c \\
&= \frac{c}{c-a}\frac{a^c}{c!}P_0 = \frac{\frac{c}{c-a}\frac{a^c}{c!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!}\frac{c}{c-a}}
\end{aligned}
$$

- M/M/c システムの特性値についても簡単に紹介しておきます.
- M/M/c システムにおいて，c 個の窓口が
すべてふさがっている確率 $C(c,a)$ はこの式のようになります.
- この $C(c,a)$ をアーラン C 式と呼びます.

M/M/c システム

定常状態における待ち室内の平均客数

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\frac{a^n}{c^{n-c}c!}P_0 \\
&= P_0\frac{a^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\left(\frac{a}{c}\right)^{n-c} = P_0\frac{a^c}{c!}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{a}{c}\right)^{n} \\
&= P_0\frac{a^c}{c!}\frac{a/c}{\{1-(a/c)\}^2} = C(c,a)\frac{a}{c-a}
\end{aligned}
$$

- 次に，定常状態における待ち室内の平均客数 L_q を示します．
- 式展開は複雑ですが，M/M/1 システムの場合と同様の考え方です．
- L_q の式も複雑ですが，アーラン C 式を用いれば簡単な形になります．

M/M/c システム

定常状態における系内の平均客数

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{c} nP_n + \sum_{n=c+1}^{\infty} nP_n \\
&= a\sum_{n=0}^{c-1} P_n + L_q + c\left\{C(c,a) - P_c\right\} \\
&= L_q + a
\end{aligned}
$$

- 次に，定常状態における系内の平均客数 L を示します．
- これまた，式展開は複雑ですが，M/M/1 システムの場合と同様の考え方です．
- L の式は，アーラン C 式や L_q を用いれば簡単な形になります．
- 系内の平均滞在時間や平均待ち時間もリトルの公式を用いれば，求めることができます．