待ち行列システム

待ちの現象

- 人気ラーメン店の行列
- 銀行の窓口やスーパーマーケットのレジの順番待ち
- 人気アイドルのイベントのチケット予約の電話がなかなかつながらない
- 計算機内ではジョブの処理待ち
- 通信ネットワークにおけるルータ内でのパケットの処理待ち

待ち行列システム

待ち行列理論

- 待ちの現象を，確率論を用いてモデル化して分析するための理論
- ラーメン店の行列に並んでからラーメンが供されるまでにかかる時間，行列に並ぶ人数
- 待ち時間や行列の人数を一定以内に抑えるのに必要なサービスの窓口の数

待ち行列システム

待ち行列理論

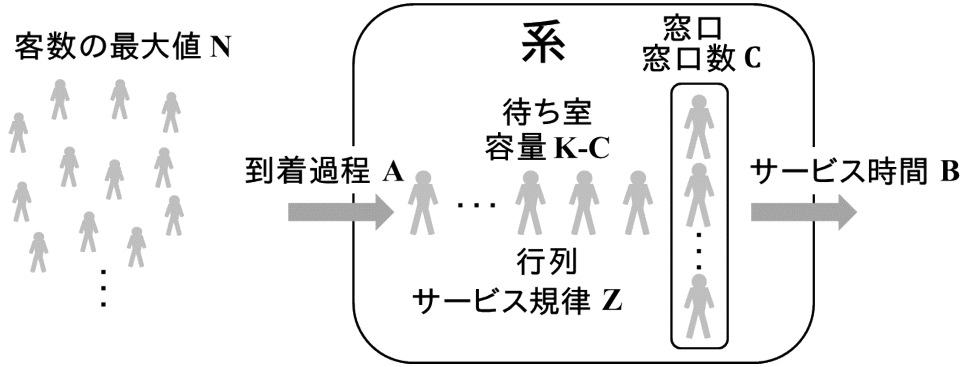
- 電話がつながらない確率，つながらない確率を一定以内に抑えるのに必要な回線数

$$\Downarrow$$

サービスの評価や設計に応用

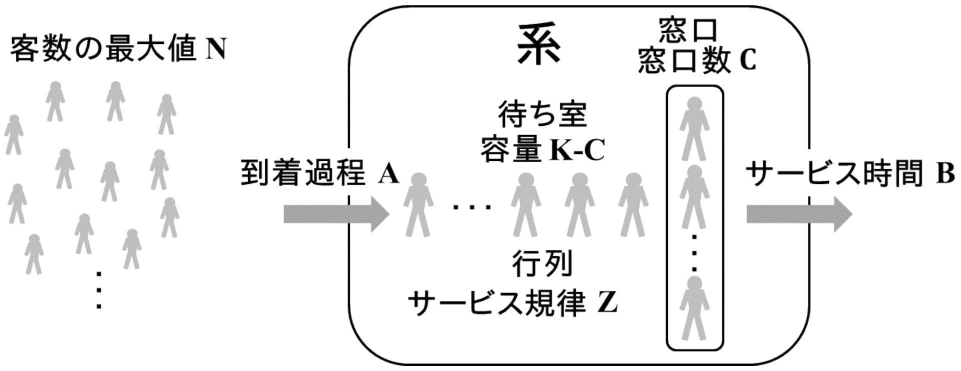
待ち行列システム

- レジに客が会計に来ること … 到着
- レジ … 窓口（サーバ）
- レジにおける処理 … サービス
- 処理にかかる時間 … サービス時間



待ち行列システム

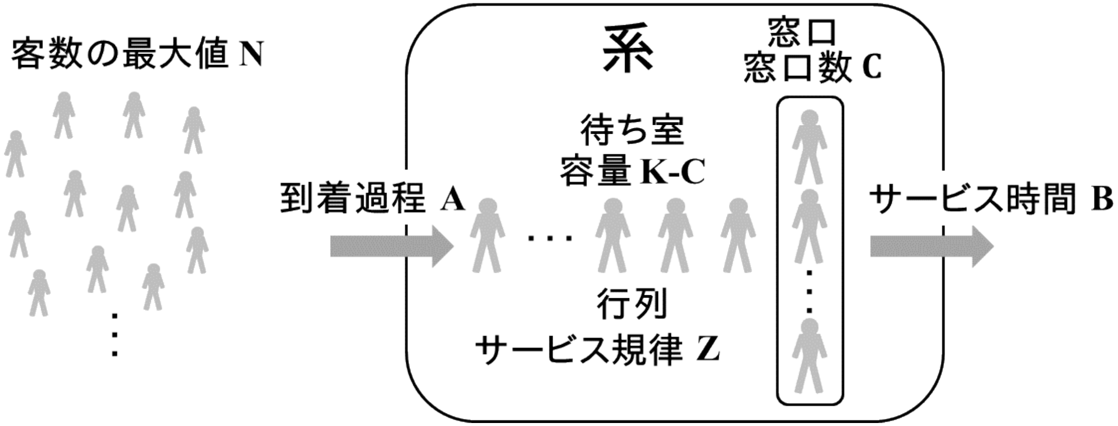
- 全ての窓口が客でふさがっている時にサービスを待つ場所 … 待ち室
- 待ち室内の客の数 … 行列の長さ
- 窓口＋待ち室 … システム（系）



待ち行列システム

待ち行列システム

A 到着過程
B サービス時間
C 窓口数
K 系の容量
N 客数の最大数
Z サービス規律



待ち行列システム

待ち行列システム

A 到着過程 客の到着の様子 ⋯ 客の到着の時間間隔の分布としてモデル化

- 客がランダムに到着 ⋯ 指数分布 M
- 到着の時間間隔が一定時間 ⋯ 一定分布 D
- 特定の分布に限定せず，独立性も仮定しない一般の分布 ⋯ 一般分布 G
- 特定の分布に限定せず，独立性を仮定する一般の分布 ⋯ GI

待ち行列システム

待ち行列システム

B サービス時間 サービスを提供する窓口において
サービスの処理に要する時間の分布

- 分布の種類により到着過程と同様の記号

C 窓口数 サービスを提供する窓口の数

K 系の容量 系に入れる客の最大数

- 窓口の数と待ち室の容量の和

N 客数の最大数 来店する可能性のある客数の最大値

待ち行列システム

待ち行列システム

Z サービス規律 客にサービスをする順番

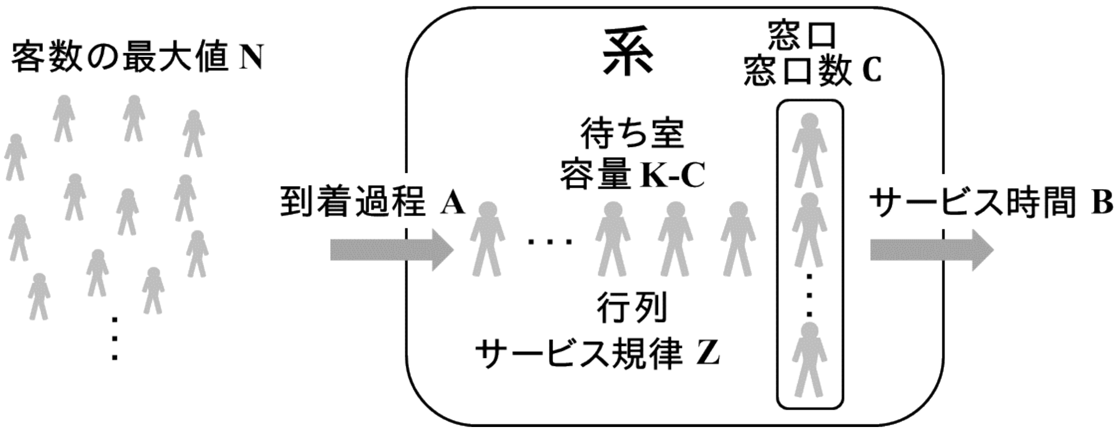
- 先着順 ··· FIFO (First In First Out),
  または FCFS (First Come First Served)
- 後着順 ··· LIFO (Last In First Out),
  または LCFS (Last Come First Served)
- その他

待ち行列システム

ケンドールの記号

- A/B/C/K/N/Z

A 到着過程
B サービス時間
C 窓口数
K 系の容量
N 客数の最大数
Z サービス規律

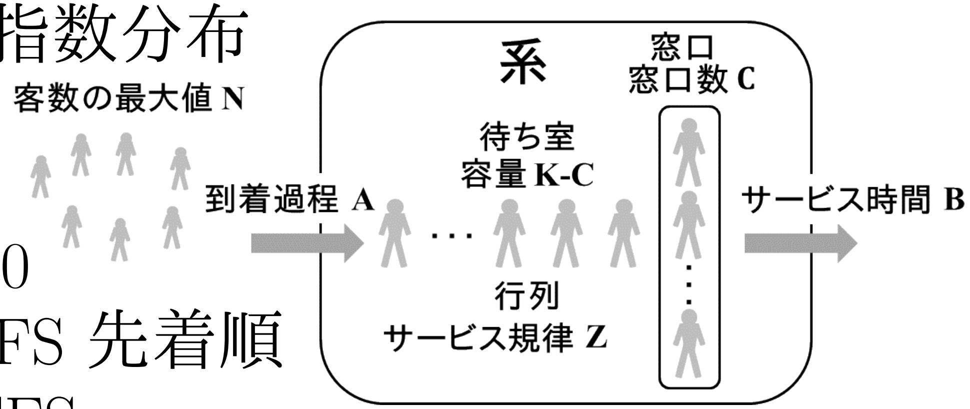


待ち行列システム

ケンドールの記号

- A/B/C/K/N/Z

A	到着過程	M 指数分布
B	サービス時間	M 指数分布
C	窓口数	2
K	系の容量	10
N	客数の最大数	1000
Z	サービス規律	FCFS 先着順



- M/M/2/10/1000/FCFS

待ち行列システム

ケンドールの記号

- A/B/C/K/N/Z

K 系の容量 ∞
N 客数の最大数 ∞
Z サービス規律 FCFS

- $\mathrm{GI/G}/c = \mathrm{GI/G}/c/\infty/\infty/\mathrm{FCFS}$
- $\mathrm{A/B}/c(k-c) = \mathrm{A/B}/c/k$
- $\mathrm{A}(n)/\mathrm{B}/c(k-c) = \mathrm{A/B}/c/k/n$

ポアソン分布と指数分布

ポアソン分布と指数分布

ポアソン過程（ポアソン到着）

定常性 事象が起こる確率はどの時間帯でも同一

無記憶性 任意の時間区間 $(t_0, t_0 + t)$ にk回の事象が起こる確率は，時刻t_0以前の事象が起こった回数に依存しない

希少性 微小時間Δの間に事象が2回以上起こる確率は$o(\Delta)$ $\cdots$ 無視できるほど小さい

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$$

ポアソン分布と指数分布

ポアソン過程（ポアソン到着）

- 時刻0からtまでに事象がn回起こる確率 $\cdots$ $P_n(t)$
- 微小時間Δに事象が1回起こる確率を$\lambda\Delta$とする

$$P_n(t+\Delta) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta) + P_n(t)(1-\lambda\Delta)$$

- 時刻tまでの発生数が$n-1$回で，それからΔの間にさらに1回起こる
- 時刻tまでの発生数がn回で，それからΔの間にさらに事象が起こらない

ポアソン分布と指数分布

$$P_n(t+\Delta) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta) + P_n(t)(1-\lambda\Delta)$$

$$\Downarrow \text{変形}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta) - P_n(t)}{\Delta} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t))$$

$\Delta \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t)) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

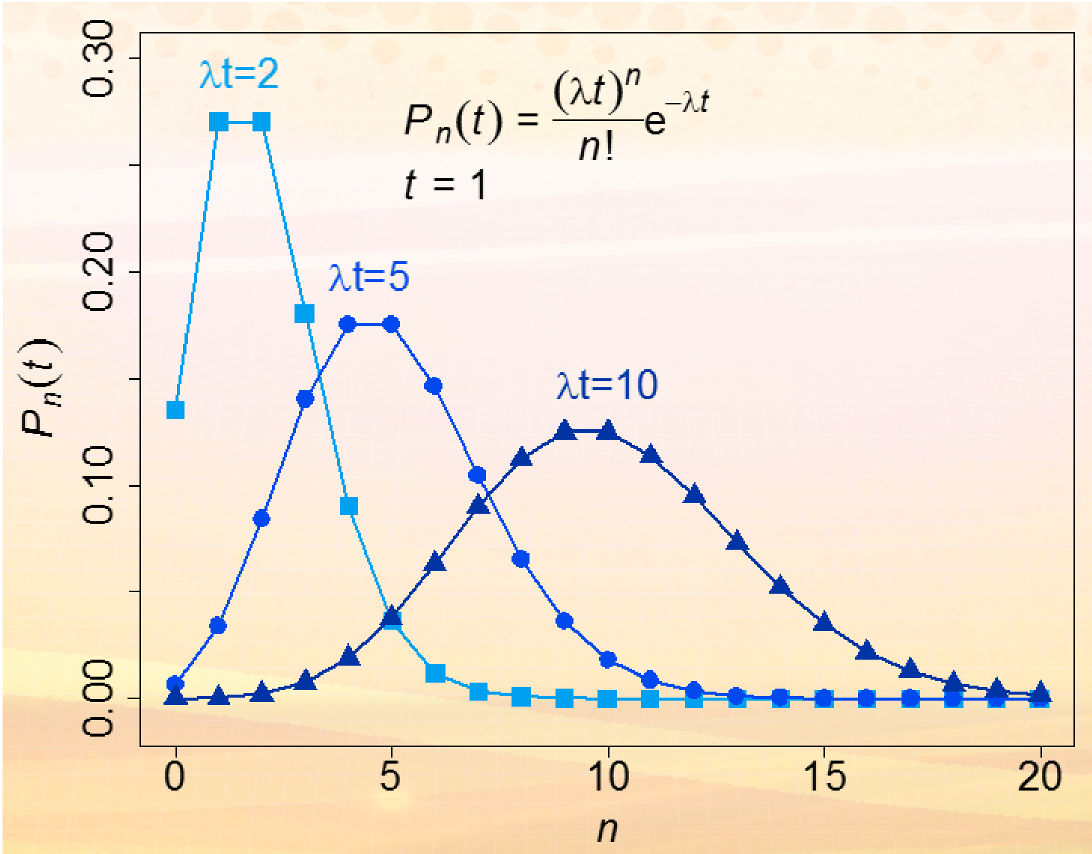
ポアソン分布と指数分布

$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(-P_n(t) + P_{n-1}(t)) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ただし，$P_{-1} = 0$ を解くと，

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$\cdots$ ポアソン分布



λt=2
λt=5
λt=10
$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$
$t = 1$
$P_n(t)$
0.00
0.10
0.20
0.30
0
5
10
15
20
n

ポアソン分布と指数分布

ポアソン分布

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 時間間隔tの間に起こる事象の回数の平均値, 分散はともにλt
- $\lambda \cdots$ 生起率（到着率）

ポアソン分布と指数分布

1時間当たり平均2.5人のポアソン分布に従う客の来店がある店で，2時間の間に来店する客が2人以下である確率を求めよ.

ポアソン分布と指数分布

1時間当たり平均2.5人のポアソン分布に従う客の来店がある店で，2時間の間に来店する客が2人以下である確率を求めよ

- 到着率λは2.5(人/時間)，時間tは2時間，$\lambda t = 5$ (人)
- 2時間の間に来店する客が2人以内である確率

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{2} \frac{5^n}{n!} e^{-5} = \frac{5^0}{0!} e^{-5} + \frac{5^1}{1!} e^{-5} + \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0.125$$

ポアソン分布と指数分布

指数分布

- ポアソン分布に従い事象が起こる時，事象が起きてから次に事象が起きるまでの時間間隔 $\cdots$ $f(t)$
- 時刻tから$t+\Delta$の間に事象が起こる確率 $\cdots$ $f(t)\Delta$
- 時刻tから$t+\Delta$の間に事象が起こる確率
  = 時刻tまで事象が起こらず，その後Δの間に
  事象が起こる確率

$$\left(1-\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\lambda\Delta)$$

ポアソン分布と指数分布

指数分布

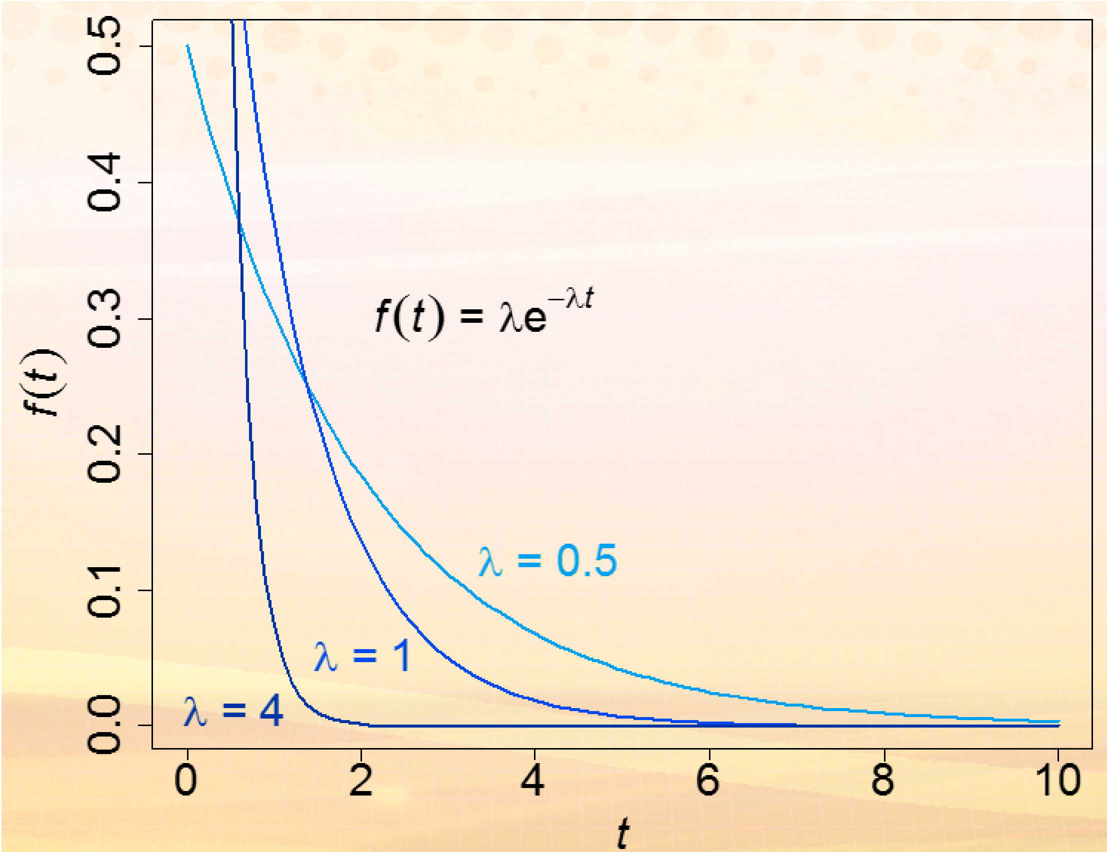
$$f(t)\Delta = \left(1 - \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\lambda\Delta)$$

両辺をΔで割って，tで微分

$$f(t)' = -\lambda f(t)$$

微分方程式を解くと，

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \cdots \text{ 指数分布}$$



$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
$\lambda = 0.5$
$\lambda = 1$
$\lambda = 4$
$f(t)$
t
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10

ポアソン分布と指数分布

指数分布

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

- 平均値 $1/\lambda$
- 　分散 $1/\lambda^2$

ポアソン分布と指数分布

指数分布

1時間当たり平均6人のポアソン分布に従う客の来店がある店における，客の到着の時間間隔の平均値を求めよ

ポアソン分布と指数分布

指数分布

1時間当たり平均6人のポアソン分布に従う客の来店がある店における，客の到着の時間間隔の平均値を求めよ

- $\lambda = 6$
- 時間間隔の平均値は$1/\lambda$
- 平均時間間隔は1/6(時間)

ポアソン分布と指数分布

指数分布

- 平均値$1/\lambda$の指数分布に従う確率変数Tがtより大きくなる確率
  $\Longrightarrow$ 事象間の時間間隔がtより大きくなる確率

$$P(T > t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau = e^{-\lambda t}$$

ポアソン分布と指数分布

指数分布

- 事象間の時間間隔がtより大きくなる確率

$$P(T > t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(T > t + s | T > t) &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \\ &= P(T > s) \end{aligned}$$

M/M/1システム

M/M/1システム

- 窓口が1個の最も単純なM/M/cシステム
- 客の到着は生起率λのポアソン分布
- サービス時間は平均$1/\mu$の指数分布
- 単位時間当たり，平均λ(人)の客が到着，
  平均μ(人)分のサービスが完了
- どのような行列の様子（確率分布）になるか？

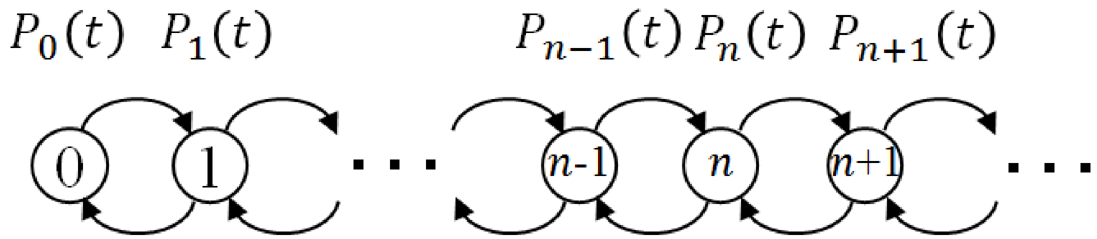
M/M/1システム

トラフィック強度

- $a = \lambda/\mu$
- $a \geq 1$　サービス処理が客の到着に追い付かない
  → 待ち行列が発散
- $a < 1$　待ち行列は発散せず，十分な時間が経過
  → 系内の客数の分布は一定（定常状態）
- $a < 1$の場合を考える

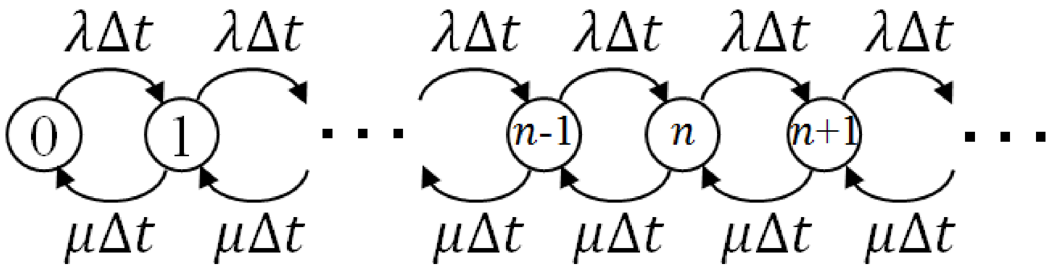
M/M/1システム

- 時刻tに，系内に客がn (人)いる確率
  $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人)いる状態



M/M/1システム

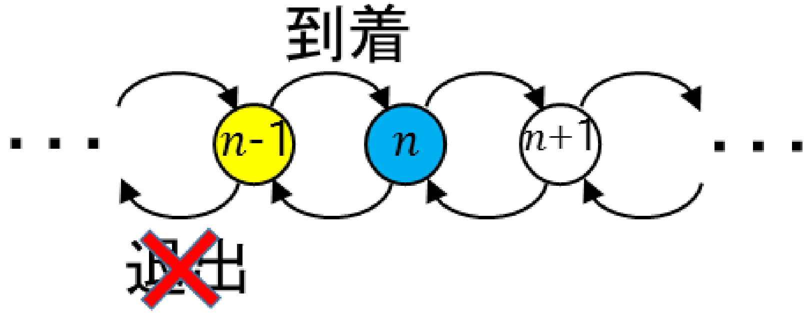
- 時刻tに，系内に客がn (人) いる確率
  $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態



M/M/1システム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

1. 時刻tに，系内の客は$n-1$ (人) で，
その後Δの間に，1人客が到着，客の退出はなし

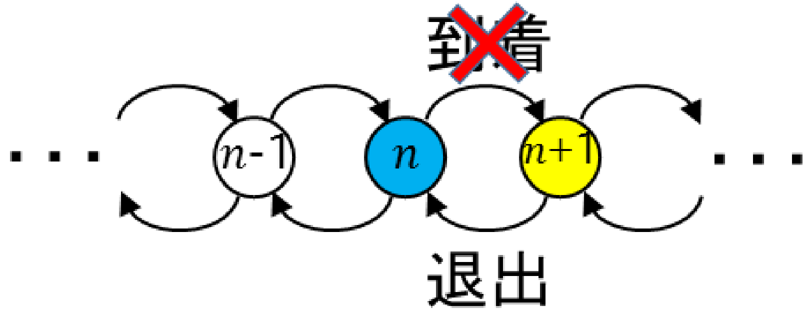


$$P_{n-1}(t)\,(\lambda\Delta)$$

M/M/1 システム

- 時刻 t の微小時間 Δ 後に系内に客が n (人) いる状態

  2. 時刻 t に，系内の客は $n+1$ (人) で，
  その後 Δ の間に，客が1人退出し，客の到着はなし

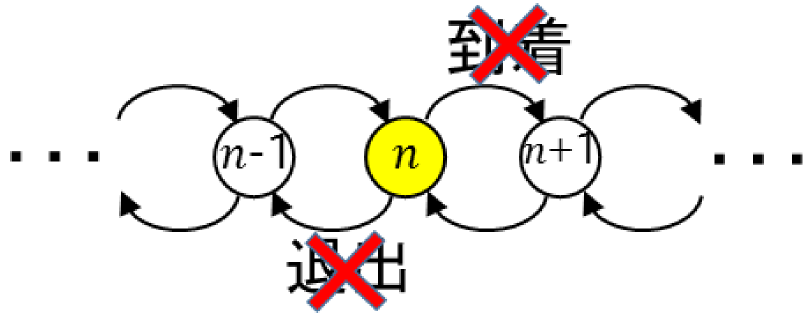


$$P_{n+1}(t)\,(\mu\Delta)$$

M/M/1システム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

3. 時刻tに，系内の客はn (人) で，
その後Δの間に，客の到着も客の退出もなし



$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-\mu\Delta)$$

M/M/1システム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn(人) いる状態

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) = &(\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&+(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

M/M/1システム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn(人) いる確率

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

$$
P_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)P_0(t) + (\mu\Delta)P_1(t)
$$

M/M/1システム

$$
\left.\begin{aligned}
P_0(t+\Delta) &= (1-\lambda\Delta)P_0(t) + (\mu\Delta)P_1(t) \\
P_n(t+\Delta) &= (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
&\quad +(\mu\Delta)P_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\left.\begin{aligned}
\tfrac{P_0(t+\Delta)-P_0(t)}{\Delta} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
\tfrac{P_n(t+\Delta)-P_n(t)}{\Delta} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}
$$

M/M/1システム

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_0(t+\Delta)-P_0(t)}{\Delta} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\\ \frac{P_n(t+\Delta)-P_n(t)}{\Delta} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots)\end{aligned}\right\}$$

$\Delta \to 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots)\end{aligned}\right\}$$

M/M/1システム

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots)\end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

一定の分布（定常状態）$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ になるとする

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ &\lambda P_{n-1} - (\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)\end{aligned}\right\}$$

M/M/1システム

$$\left.\begin{aligned} &-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ &\lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu) P_n + \mu P_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \rho P_0 \\ P_{n+1} &= (1 + \rho) P_n - \rho P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\}$$

$\rho = \lambda/\mu$ ⋯ 利用率

M/M/1システム

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \rho P_0 \\ P_{n+1} &= (1+\rho)P_n - \rho P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\}$$

$\rho = \lambda/\mu$

$n = 1$から順次適用すると

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = \frac{P_0}{1-\rho} = 1$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

M/M/1システム

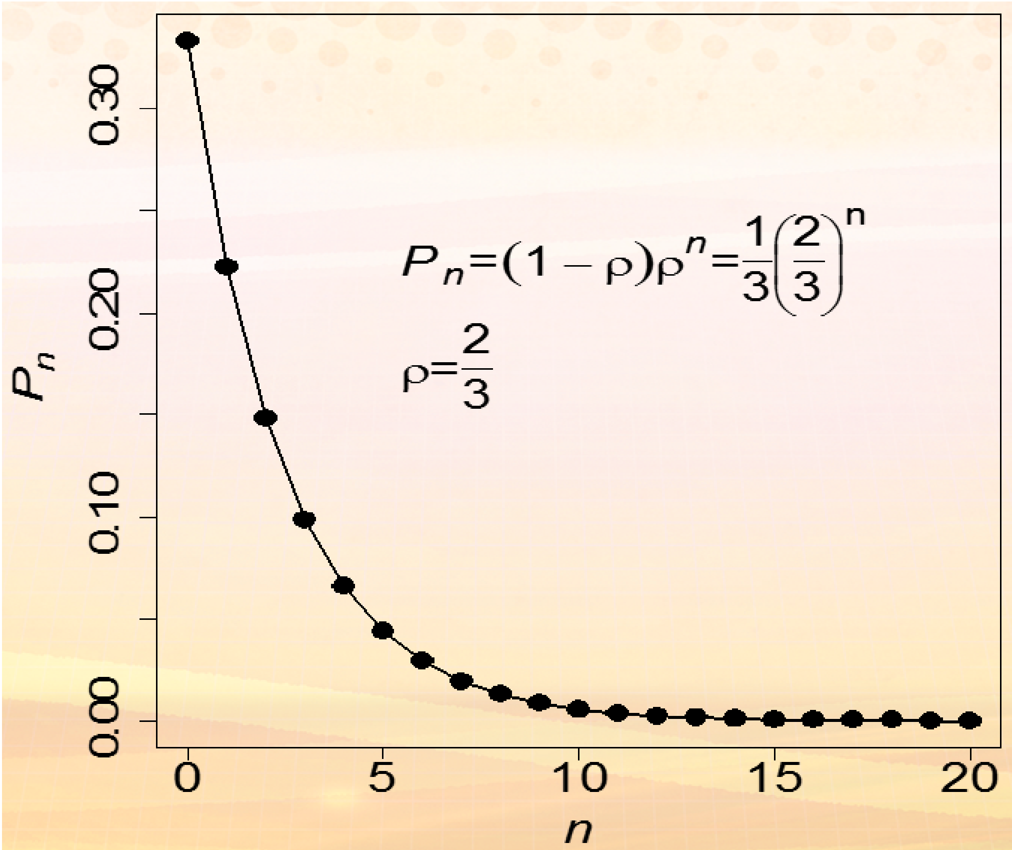
ATMが1台のみのATMコーナーでは，1時間当たり平均20人のポアソン分布に従い客が到着する．ATMの使用は1件当たり平均2分の指数分布に従う．系内の客数の定常分布を求めよ．

M/M/1システム

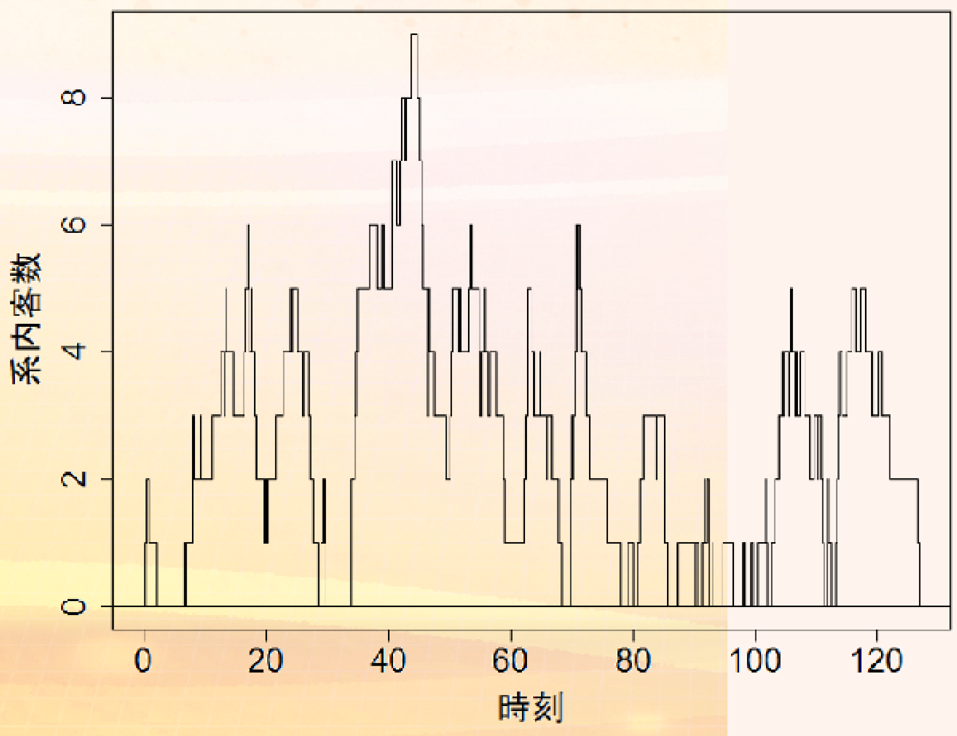
ATMが1台のみのATMコーナーでは，1時間当たり平均20人のポアソン分布に従い客が到着する．ATMの使用は1件当たり平均2分の指数分布に従う．系内の客数の定常分布を求めよ．

$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \mu = 1/2,\ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$



$P_n = (1-\rho)\rho^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
$\rho = \frac{2}{3}$
P_n
0.00
0.10
0.20
0.30
0
5
10
15
20
n


系内客数
0
2
4
6
8
0
20
40
60
80
100
120
時刻

M/M/1システム

定常状態における系内の平均客数

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ここで,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

M/M/1システム

定常状態における系内の平均滞在時間

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{L+1}{\mu} = \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

M/M/1システム

リトルの公式

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{L+1}{\mu} = \frac{1}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W$$

M/M/1システム

定常状態における待ち室内の平均客数

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \rho\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1} \\
&= \rho\sum_{n=0}^{\infty}nP_n = \rho L = \tfrac{\rho^2}{1-\rho} = L-\rho
\end{aligned}
$$

M/M/1システム

定常状態における平均待ち時間

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n}{\mu} = \frac{L}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = W - \frac{1}{\mu}$$

M/M/1システム

リトルの公式

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \rho\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}$$

$$= \rho\sum_{n=0}^{\infty}nP_n = \rho L = \frac{\rho^2}{1-\rho} = L - \rho$$

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty}P_n\frac{n}{\mu} = \frac{L}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = W - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda W_q$$

M/M/1 システム

ATM が 1 台のみの ATM コーナーでは，1時間当たり平均20人のポアソン分布に従い客が到着する．ATM の使用は1件当たり平均2分の指数分布に従う．コーナー内の平均客数，平均滞在時間，待ち行列の平均長，平均待ち時間を求めよ．

$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \mu = 1/2,\ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

M/M/1システム

$$\lambda = 20/60 = 1/3,\ \ \mu = 1/2,\ \ \rho = \lambda/\mu = 2/3$$

$$\begin{aligned}
L &= \rho/(1-\rho) = (2/3)/(1-2/3) = 2 \\
W &= \frac{1}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1-2/3}\times\frac{1}{1/2} = 6 \\
L_q &= \rho^2/(1-\rho) = (2/3)^2/(1-2/3) = 4/3 \\
W_q &= \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} = (2/3)/(1-2/3)\times(1/(1/2)) = 4
\end{aligned}$$

M/M/cシステム

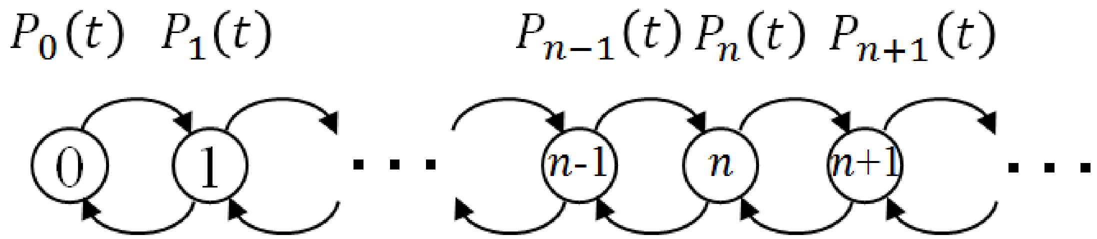
M/M/cシステム

トラフィック強度と利用率

- $a = \lambda/\mu$ ··· トラフィック強度
- $\rho = \lambda/(c\mu)$ ··· 利用率
- $\rho \geq 1$　サービス処理が客の到着に追い付かない
  $\rightarrow$ 待ち行列が発散
- $\rho < 1$　待ち行列は発散せず，十分な時間が経過
  $\rightarrow$ 系内の客数の分布は一定（定常状態）
- $\rho < 1$の場合を考える

M/M/cシステム

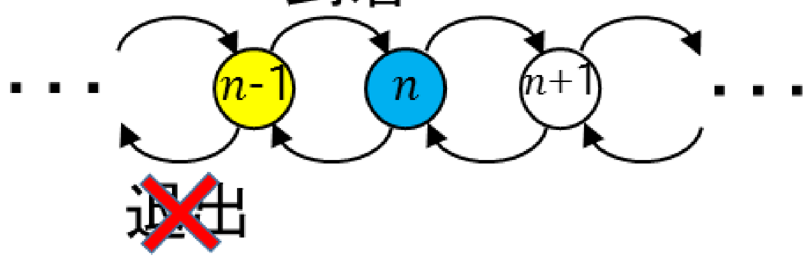
- 時刻tに，系内に客がn (人) いる確率 $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態



M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

1. 時刻tに，系内の客は$n-1$ (人) で，
その後Δの間に，1人客が到着，客の退出はなし

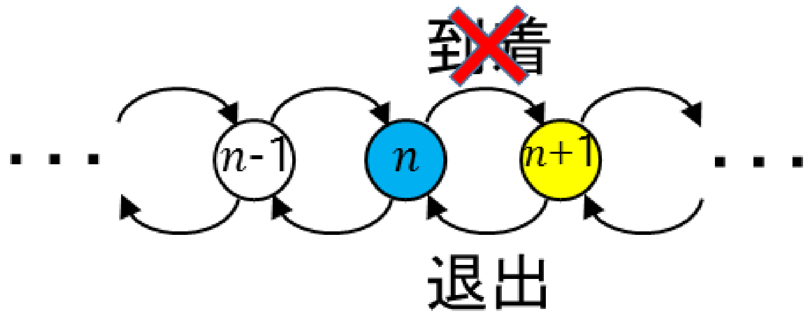


$$P_{n-1}(t)\,(\lambda\Delta)$$

M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

2. 時刻tに，系内の客は$n+1$ (人) で，
その後Δの間に，客が1人退出し，客の到着はなし

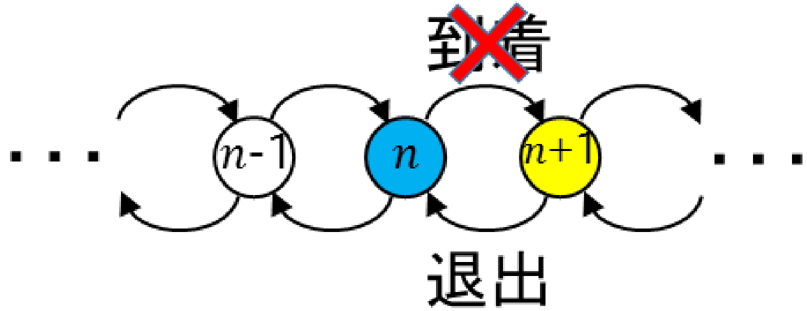


$$P_{n+1}(t)\,((n+1)\mu\Delta) \qquad (n=0,1,\cdots,c-1)$$

M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

2. 時刻tに，系内の客は$n+1$ (人) で，
その後Δの間に，客が1人退出し，客の到着はなし

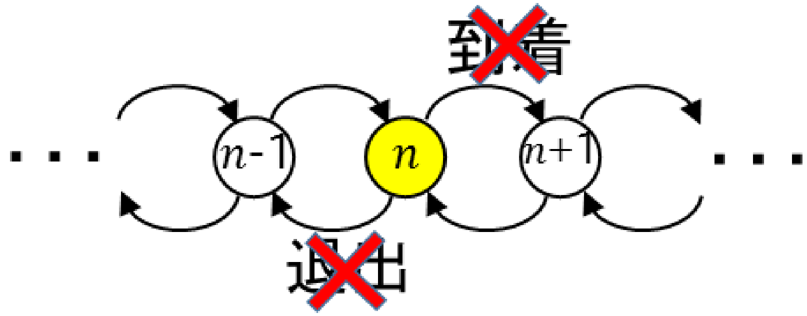


$$P_{n+1}(t)\,(c\mu\Delta) \qquad (n=c,c+1,\cdots)$$

M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

3. 時刻tに，系内の客はn (人) で，
その後Δの間に，客の到着も客の退出もなし

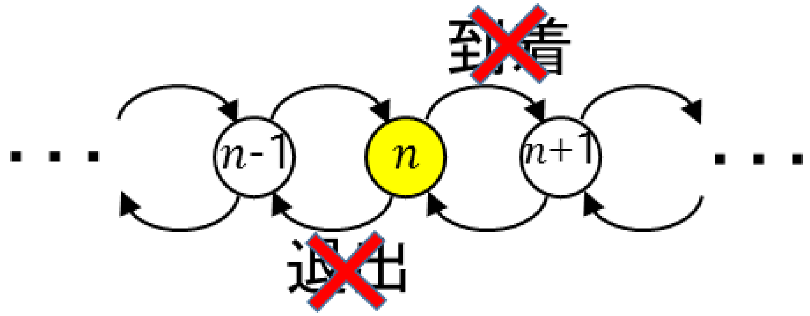


$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-(n+1)\mu\Delta) \qquad (n=0,1,\cdots,c-1)$$

M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn (人) いる状態

3. 時刻tに，系内の客はn (人) で，
その後Δの間に，客の到着も客の退出もなし



$$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta-c\mu\Delta) \qquad (n=c,c+1,\cdots)$$

M/M/cシステム

- 時刻tの微小時間Δ後に系内に客がn(人) いる確率

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) \;=\; & (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
& +((n+1)\mu\Delta)P_{n+1}(t) \quad (n=1,2,\cdots,c-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta) \;=\; & (\lambda\Delta)P_{n-1}(t) + (1-\lambda\Delta-\mu\Delta)P_n(t) \\
& +(c\mu\Delta)P_{n+1}(t) \quad (n=c,c+1,\cdots)
\end{aligned}
$$

$$
P_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)P_0(t) + (\mu\Delta)P_1(t)
$$

M/M/cシステム

定常分布

$$
\left.
\begin{array}{l}
P_0 = \left\{ \displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!}\frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1} \\
P_n = \begin{cases} \frac{a^n}{n!} P_0 & (n = 1, \cdots, c) \\ \frac{a^n}{c^{n-c} c!} P_0 & (n = c+1, c+2, \cdots) \end{cases} \\
a = \frac{\lambda}{\mu},\ \rho = \frac{\lambda}{c\mu}
\end{array}
\right\}
$$

M/M/cシステム

- M/M/cシステムにおいて，c個の窓口がすべてふさがっている確率$C(c,a)$

$$C(c,a) = \sum_{n=c}^{\infty} P_n = \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{n-c} P_c = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{n} P_c$$

$$= \frac{c}{c-a}\frac{a^c}{c!}P_0 = \frac{\frac{c}{c-a}\frac{a^c}{c!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!}\frac{c}{c-a}}$$

M/M/cシステム

定常状態における待ち室内の平均客数

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\frac{a^n}{c^{n-c}c!}P_0 \\
&= P_0\frac{a^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\left(\frac{a}{c}\right)^{n-c} = P_0\frac{a^c}{c!}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{a}{c}\right)^{n} \\
&= P_0\frac{a^c}{c!}\frac{a/c}{\{1-(a/c)\}^2} = C(c,a)\frac{a}{c-a}
\end{aligned}
$$

M/M/cシステム

定常状態における系内の平均客数

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{c} nP_n + \sum_{n=c+1}^{\infty} nP_n \\
&= a\sum_{n=0}^{c-1} P_n + L_q + c\{C(c,a) - P_c\} \\
&= L_q + a
\end{aligned}$$