

統計モデル

統計モデル

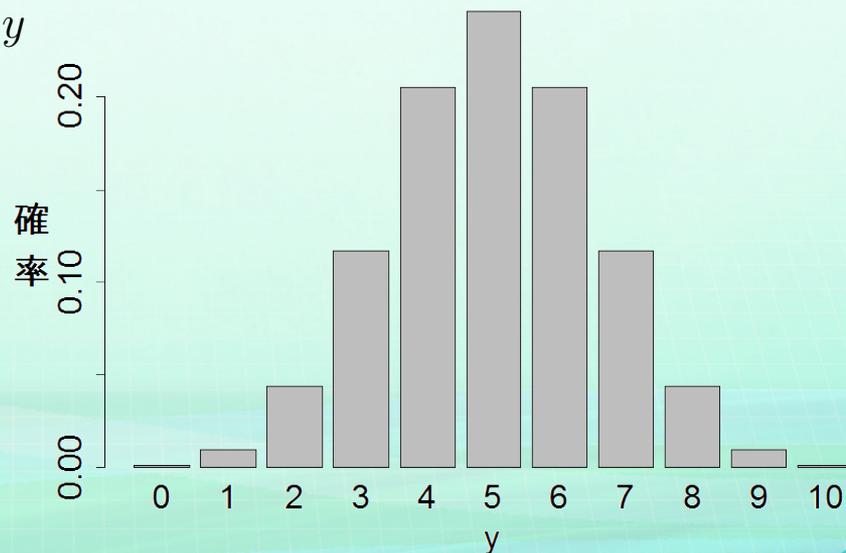
- ばらつきや誤差を含むデータの背後にある規則性, データを発生させる仕組みを数式で表したもの
- 観測誤差を含む観測データから背後にある現象を分析・予測

統計モデル

- コインを投げて表が出る確率を θ として,
 N 回コインを投げたときに y 回表が出る確率

$$P(y|N, \theta) = {}_N C_y \theta^y (1 - \theta)^{N-y}$$

- 二項分布モデル
- $\theta = 0.5$
- $N = 10$

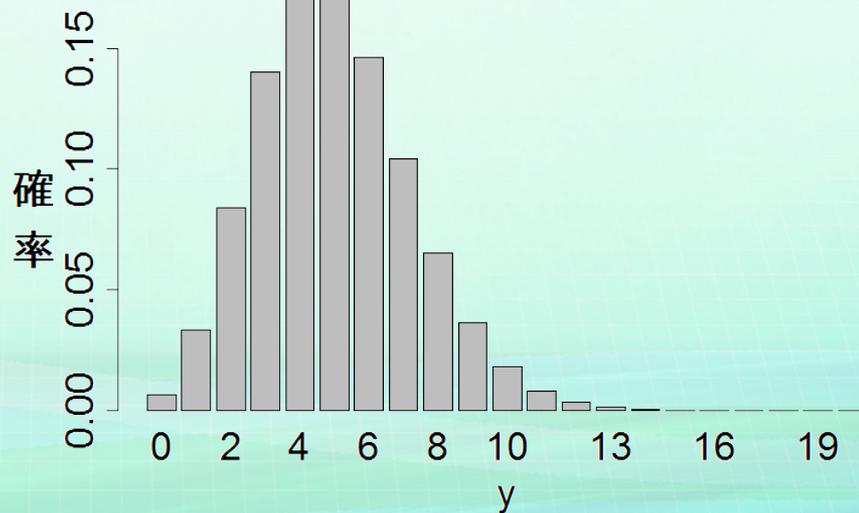


統計モデル

- 1時間に平均 λ 人の客が来る窓口に、1時間に y 人の客が来る確率

$$P(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

- ポアソン分布モデル
- $\lambda = 5$



統計モデル

- 単位面積当たりの給水量 (x) に対して，植物の収穫量 (y) が，平均 $\beta_0 + \beta_1 x$ ，分散 σ^2 (標準偏差 σ) の正規分布にしたがう
- 給水量 x のときに収穫量 y の確率密度

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{\{y - (\beta_0 + \beta_1 x)\}^2}{2\sigma^2} \right]$$

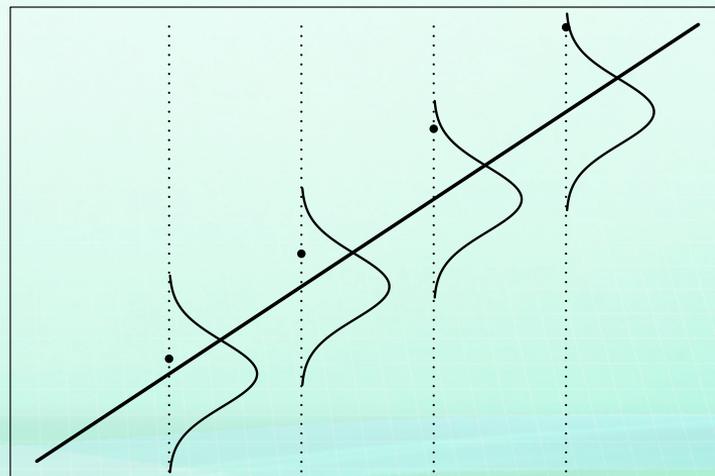
統計モデル

- y が、平均 $\beta_0 + \beta_1 x$ 、分散 σ^2 (標準偏差 σ) の正規分布にしたがう

$$y \simeq \beta_0 + \beta_1 x$$

と近似

y



x

統計モデル

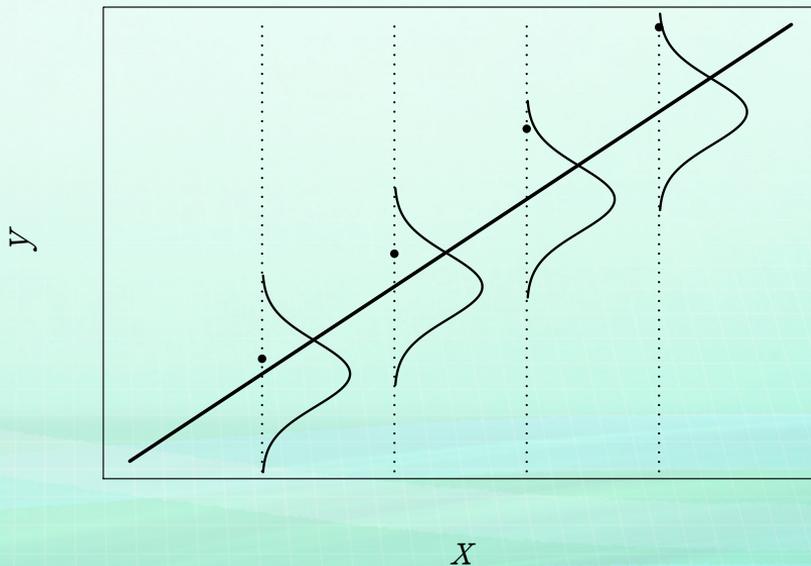
◆モデルの構築

1. データの背後にある規則性，データを発生させる仕組みを関数で表す
 - 関数の型式は決まる／パラメタの値はわからない
2. 観測データと照らし合わせて最も適切なパラメタの決定 (推定)
 - 非線形最適化
3. モデルの評価，修正

統計モデル

- y が, 平均 $\beta_0 + \beta_1 x$, 分散 σ^2 (標準偏差 σ) の正規分布にしたがう

$y \simeq \beta_0 + \beta_1 x$
と近似



統計モデル

◆モデルの構築

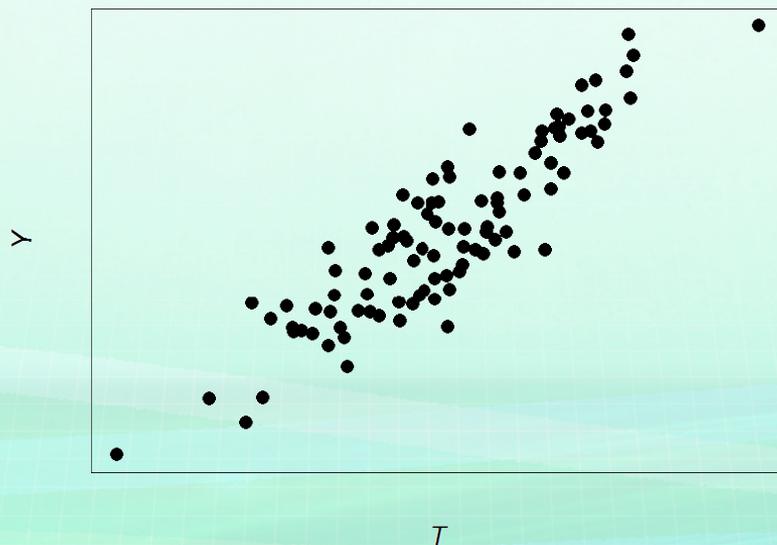
1. データの背後にある規則性，データを発生させる仕組みを関数で表す
 - 関数の型式は決まる／パラメタの値はわからない
2. 観測データと照らし合わせて最も適切なパラメタの決定 (推定)
 - 非線形の最適化
3. モデルの評価，修正

最小二乗法によるパラメタ推定

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

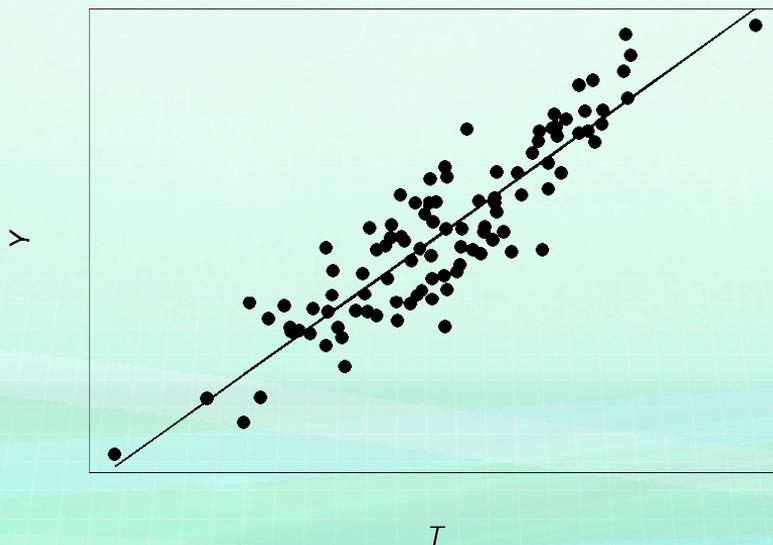
- 1日の最高気温 T とビールの販売量 Y の関係



最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

- 1日の最高気温 T とビールの販売量 Y の関係



最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

- 1日の最高気温 T とビールの販売量 Y の間に近似的に直線関係が成り立ちそう

$$Y = \beta_0 + \beta_T T$$

- 原因となる変数 … 説明変数
- 結果となる変数 … 目的変数
- 説明変数と目的変数を結びつけるモデル … 回帰モデル

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

- 説明変数 T と目的変数 Y の間に近似的に

$$Y = \beta_0 + \beta_T T$$

が成り立つと仮定

- n 個の Y の測定値を Y_1, Y_2, \dots, Y_n ,
対応する T の値を各々 T_1, T_2, \dots, T_n

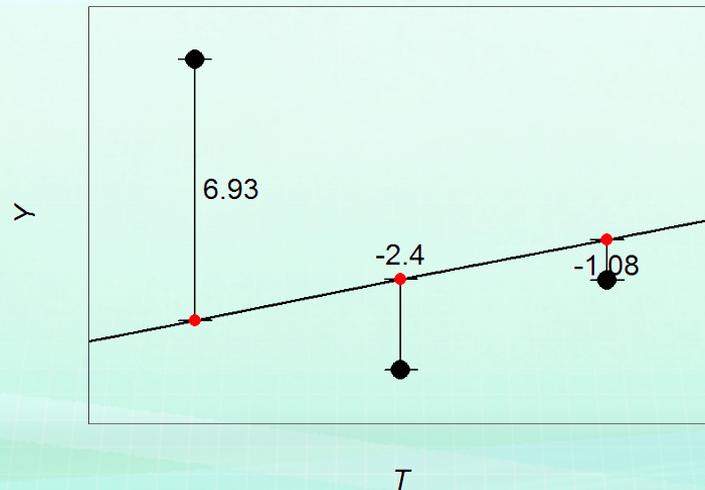
$$Y_i = \beta_0 + \beta_T T_i + \varepsilon_i$$

- ε_i は直線近似した時の誤差（残差）

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

- 各 ε_i が0に近いほど直線がよく当てはまっている



最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

- 各 ε_i が0に近いほど直線がよく当てはまっている

$$J(\beta_0, \beta_T) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\beta_0 + \beta_T T_i)\}^2$$

が最小になるようにパラメタ β_0, β_T を決定
… 最小二乗法

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

$$J(\beta_0, \beta_T) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\beta_0 + \beta_T T_i)\}^2$$

を最小とする β_0, β_T を決定

- J が最小になるためには,

$$\nabla J(\beta_0, \beta_T) = \mathbf{0}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = 2n\beta_0 - 2\sum_{i=1}^n Y_i + 2\beta_T \sum_{i=1}^n T_i = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_T} = 2\beta_T \sum_{i=1}^n T_i^2 - 2\sum_{i=1}^n T_i Y_i + 2\beta_0 \sum_{i=1}^n T_i = 0$$

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n T_i Y_i \sum_{i=1}^n T_i}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 - (\sum_{i=1}^n T_i)^2}, \quad \beta_T = \frac{n \sum_{i=1}^n T_i Y_i - \sum_{i=1}^n T_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 - (\sum_{i=1}^n T_i)^2}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形単回帰モデル

$$J(\beta_0, \beta_T) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\beta_0 + \beta_T T_i)\}^2$$

を最小とする β_0, β_T を決定

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

- 1日の最高気温 T ，降水量 R とビールの販売量 Y の間に近似的に

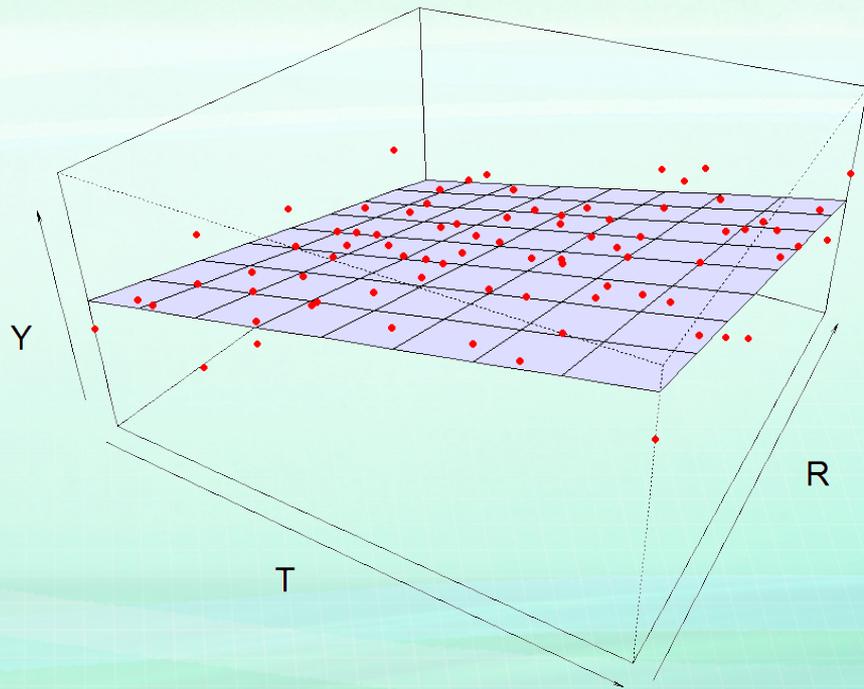
$$Y = \beta_0 + \beta_T T + \beta_R R$$

が成り立つ

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

- 1日の最高気温 T ,
降水量 R とビールの
販売量 Y との関係



最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

- p 個の説明変数 x_1, x_2, \dots, x_p を用いて, 近似的に

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$$

が成り立つと仮定

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

- 複数の説明変数からなる線形回帰モデル
… (線形)重回帰モデル

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

- 重回帰モデルのパラメタ $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ は

$$J(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip})\}^2$$

を最小化する最小二乗法で求められる

- $\nabla J(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ を解くと, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ が求められる

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T, \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]^T$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆線形重回帰モデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$J(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\nabla J(\boldsymbol{\beta}) = -2\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$

を解くと

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆モデルの評価

$$\beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

- \mathbf{X} を構成するベクトルが線形従属
= 1つの説明変数が他の説明変数の線形和
… $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ が逆行列を持たない
- 線形従属に近い状態 … パラメタが不安定
- 説明変数が冗長
- 分散拡大要因 (variance inflation factor; VIF),
トレランス (tolerance)

最小二乗法によるパラメタ推定

◆モデルの評価

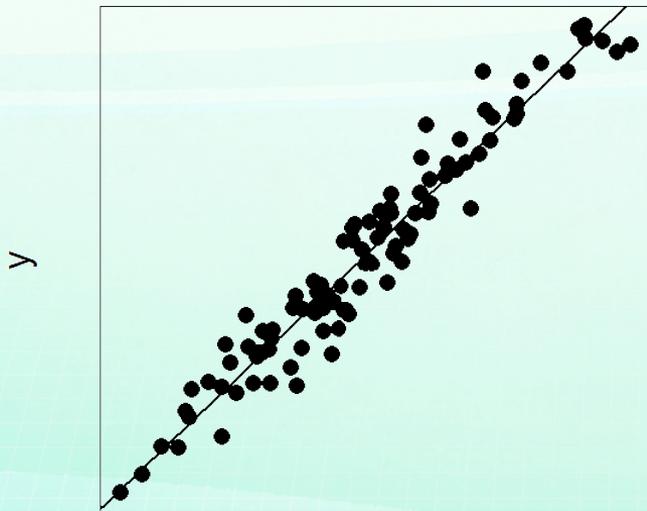
- 測定値 y と推定値 $Y = X\beta$ の相関係数 (重相関係数)

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

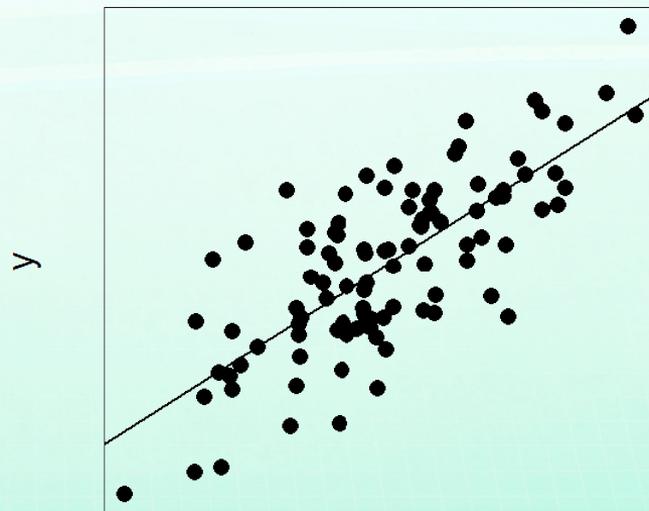
- $-1 \leq R \leq 1$ … 増減をともしにする程度
- 決定係数 R^2 … y の変動をモデルで説明できる割合

最小二乗法によるパラメタ推定

◆モデルの評価



$$R^2 = 0.94$$



$$R^2 = 0.64$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆モデルの評価

- $-1 \leq R \leq 1$ … 増減をともにする程度
- 決定係数 R^2 … y の変動をモデルで説明できる割合
- 説明変数の数が多いほど R^2 は大きい
… 説明変数が多過ぎると予測精度低下
- 自由度調整済み決定係数

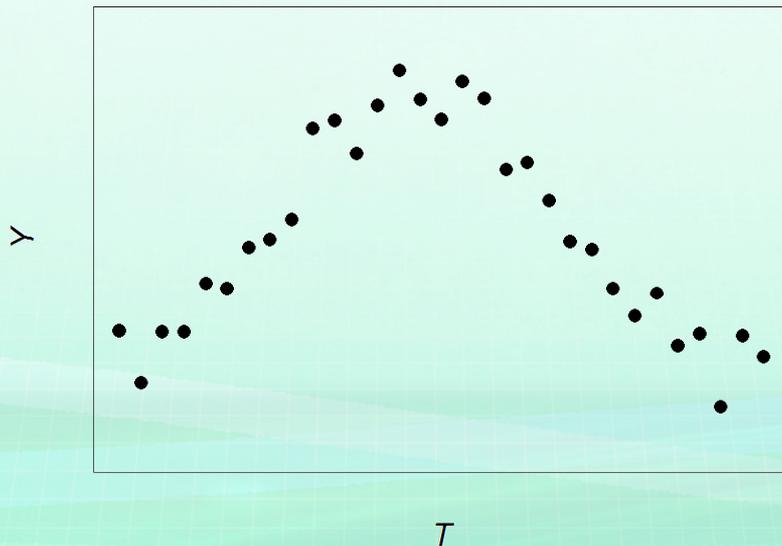
$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2)$$

説明変数の数をペナルティ

最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

- 1日の最高気温 T とビールの販売量 Y の関係

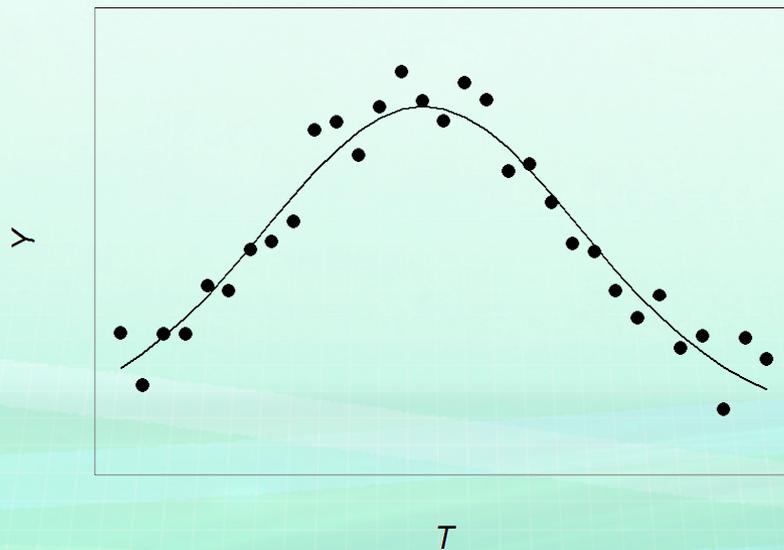




最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

- 1日の最高気温 T とビールの販売量 Y の関係





最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

- Y と T の間に近似的に

$$Y = f(T|\beta)$$

が成り立つと仮定

- β はパラメタのベクトル
- n 個の Y の測定値を Y_1, Y_2, \dots, Y_n ,
対応する T の値を各々 T_1, T_2, \dots, T_n

$$Y_i = f(T_i|\beta) + \varepsilon_i$$



最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

$$Y_i = f(T_i|\beta) + \varepsilon_i$$

- パラメタ β は線形回帰モデルの場合と同様に

$$J(\beta) = \sum_{i=1}^n \{Y_i - f(T_i|\beta)\}^2$$

を最小化する最小二乗法で求めることができる

- 一般にはニュートン法などの非線形最適化法を用いて数値的に解を求める

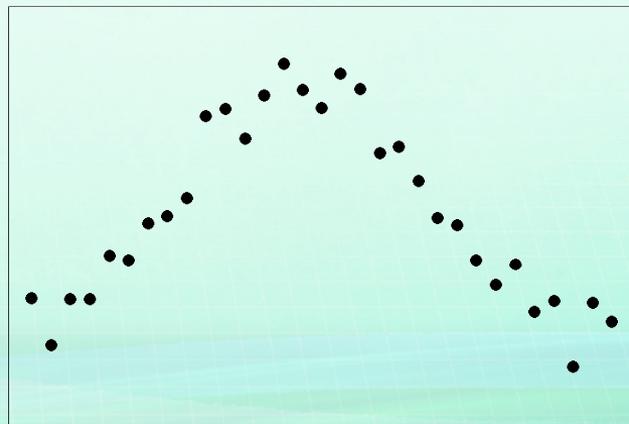
最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

$$Y = f(T|\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 \exp\left(-\frac{(T - \beta_2)^2}{\beta_3^2}\right)$$

$$Y_i = \beta_1 \exp\left(-\frac{(T_i - \beta_2)^2}{\beta_3^2}\right) + \varepsilon_i$$

>



T

最小二乗法によるパラメタ推定

$$J(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \beta_1 \exp \left(-\frac{(T_i - \beta_2)^2}{\beta_3^2} \right) \right\}^2$$

$$\nabla J(\boldsymbol{\beta}) = \left[\frac{\partial J}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial J}{\partial \beta_2} \quad \frac{\partial J}{\partial \beta_3} \right]^T$$

$$\nabla^2 J(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_2^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_3 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_3 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_3^2} \end{bmatrix}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

- $\nabla J(\beta)$ の計算

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} J(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{J(\beta_1 + \Delta, \beta_2, \beta_3) - J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\Delta}$$

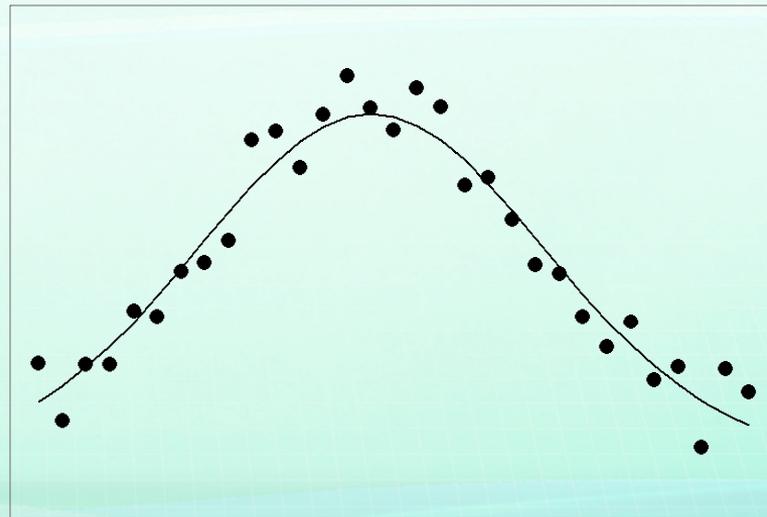
- Δ を 0 に近い数として差分近似

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} J(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \simeq \frac{J(\beta_1 + \Delta, \beta_2, \beta_3) - J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\Delta}$$

最小二乗法によるパラメタ推定

◆非線形回帰モデル

$$y = \beta_1 \exp\left(-\frac{(T - \beta_2)^2}{\beta_3^2}\right)$$



T

最尤推定法によるパラメタ推定

最尤推定法によるパラメタ推定

◆^{ゆうど}尤度 (尤度関数)

- ある統計モデル $f(y|\boldsymbol{\theta})$ を仮定しているときに、特定の観測データが得られる確率 (確率密度)

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n | \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \boldsymbol{\theta})$$

- パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ の関数

$$L(\boldsymbol{\theta} | y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \boldsymbol{\theta})$$

最尤推定法によるパラメタ推定

◆最尤推定法

- 尤度（尤度関数）

$$L(\boldsymbol{\theta}|y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\boldsymbol{\theta})$$

- 観測データに統計モデルが「どれくらいあてはまっているか」を表す尺度
- 最尤推定法では，観測データのもとで尤度が最大になるようにパラメタ値を決定

最尤推定法によるパラメタ推定

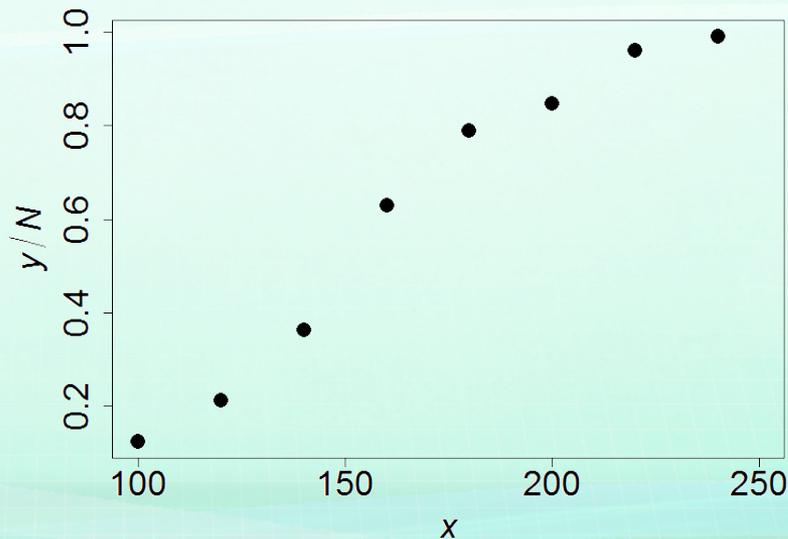
- 材料は温度を上げると化学的特性が変化
- 加熱温度 x (°C), サンプル数 N (個), そのうち特性が変化したサンプル数 y (個)
- 加熱温度と特性が変化する確率の関係を求めよ

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	100	120	140	160	180	200	220	240
N_i	96	99	99	97	100	98	99	100
y_i	12	21	36	61	79	83	95	99

最尤推定法によるパラメタ推定

◆ロジスティック回帰モデル

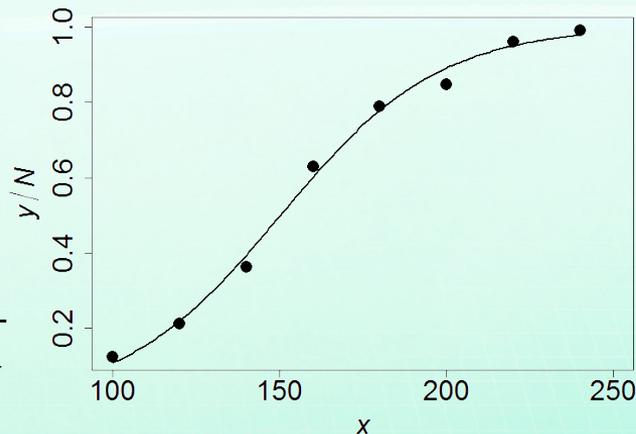
- 加熱温度 x ($^{\circ}\text{C}$)
- サンプル数 N (個)
- 特性が変化した
サンプル数 y (個)



最尤推定法によるパラメタ推定

◆ロジスティック回帰モデル

$$\begin{aligned} p(x|\beta_0, \beta_1) &= \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)} \\ &= \frac{1}{1 + \exp\{-(\beta_0 + \beta_1 x)\}} \end{aligned}$$



最尤推定法によるパラメタ推定

◆ロジスティック回帰モデル

- 加熱温度が x_i (°C) のときに N_i 個のサンプル中 y_i 個の特性が変化する確率は二項分布にしたがう

$$P(y_i|x_i, N_i, P_i) = {}_{N_i}C_{y_i} P_i^{y_i} (1 - P_i)^{N_i - y_i}$$
$$P_i = p(x_i|\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{1 + \exp\{-(\beta_0 + \beta_1 x)\}}$$

- N_i 個の中から y_i 個を選ぶ組み合わせの数

$${}_{N_i}C_{y_i} = \binom{N_i}{y_i} = \frac{N_i!}{(N_i - y_i)! y_i!}$$

最尤推定法によるパラメタ推定

◆ロジスティック回帰モデル

- $i = 1, 2, \dots, n$ ($n = 8$)において、加熱温度が x_i ($^{\circ}\text{C}$) のときに N_i 個のサンプル中 y_i 個の特性が変化する確率

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n | \beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^n N_i C_{y_i} P_i^{y_i} (1 - P_i)^{N_i - y_i}$$

- $f(y_1, y_2, \dots, y_n | \beta_0, \beta_1)$ をパラメタ β_0, β_1 の関数 $L(\beta_0, \beta_1) \cdots$ 尤度

最尤推定法によるパラメタ推定

◆ロジスティック回帰モデル

●対数尤度関数

$$\begin{aligned} \log L(\beta_0, \beta_1) = & \sum_{i=1}^n \log N_i C_{y_i} + \sum_{i=1}^n (y_i \log P_i) \\ & + \sum_{i=1}^n \{(N_i - y_i) \log(1 - P_i)\} \end{aligned}$$

最尤推定法によるパラメタ推定

◆正規分布モデルと最小二乗法

- 回帰モデル $y = f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\beta})$ を当てはめるとき、
 y が平均 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\beta})$ 、分散 σ^2 の正規分布にしたがう

$$g(y|\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{\{y - f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\beta})\}^2}{2\sigma^2} \right]$$

- 最尤推定法によるパラメタの推定値と
最小二乗法によるパラメタの推定値は一致する

最尤推定法によるパラメタ推定

◆正規分布モデルと最小二乗法

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{\{y_i - f(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\beta})\}^2}{2\sigma^2} \right]$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n \{y_i - f(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\beta})\}^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$J = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - f(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\beta})\}^2$$

最尤推定法によるパラメタ推定

◆モデル選択

- パラメタ数が多いほど良いモデルという訳ではない
- 予測精度の高いモデル，本質を捉えたモデル
- 様々なモデル選択基準
- 赤池の情報量基準 (AIC)

$$AIC(k) = -2 \text{最大対数尤度} + 2k$$

k はパラメタ数

AICが小さいほど良いモデル

最尤推定法によるパラメタ推定

- コンピュータを内蔵した機器同士がネットワークにより接続され，自律的に連係動作することにより，人の生活を支援する技術と環境
 - … ユビキタスネットワーク，
IoT (Internet of Things)
- 多様で大量のデータ
- 役に立つ変数はほんの一部
- モデル選択，正則化