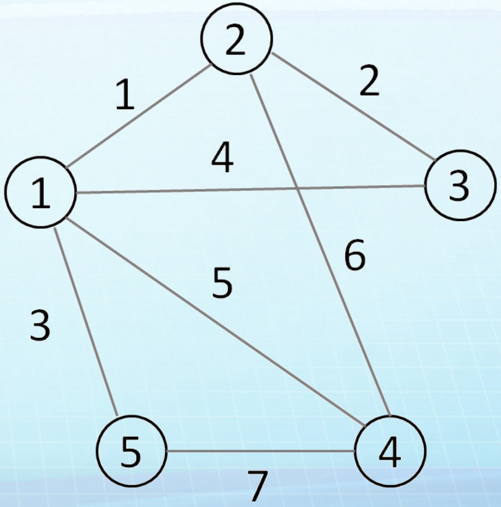
欲張り法

欲張り法

◆最小木問題

- 点は地点
- 枝は敷設計画のある道路
- 数値は地点間の距離(km)
- 最小の距離ですべての地点間を行き来できる道路の敷設計画を完成させよ



欲張り法

◆最小木問題

- 点の集合をV，枝の集合をE,
  枝$(i,j)\in E$の長さをc_{ij}
- (i,j)を最小木に　含める時 $x_{ij}=1$
  含めない時 $x_{ij}=0$
- 目的関数zは道路の距離の総和

$$z=\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i<j}} c_{ij}x_{ij}$$

欲張り法

◆最小木問題

- 閉路が存在しない
  すべての$S \subseteq V$において，S内の枝の数が
  Sの点の数$|S|$より少ない

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i,j\in S \\ i<j}} x_{ij} \leq |S| - 1$$

欲張り法

◆最小木問題

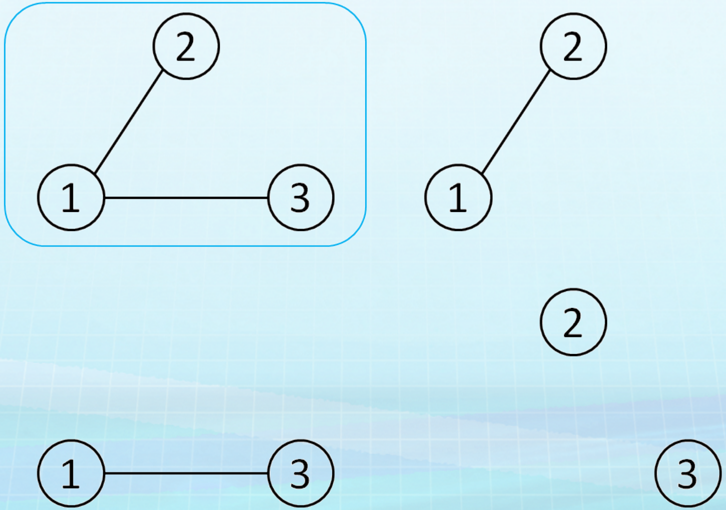
- V のすべての点がつながっている
  V 内に閉路がなく
  枝の数が $|V| - 1$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i<j}} x_{ij} = |V| - 1$$

欲張り法

◆最小木問題

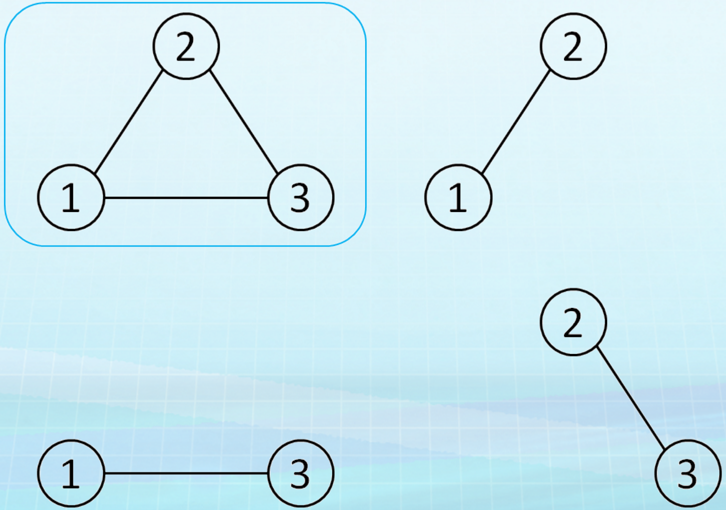
- 閉路が存在しない，すべての点がつながっている



欲張り法

◆最小木問題

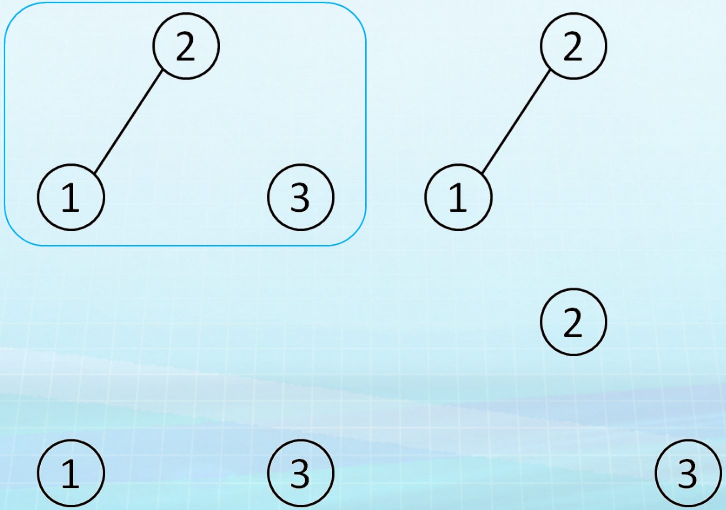
- 閉路が存在する，すべての点がつながっている



欲張り法

◆最小木問題

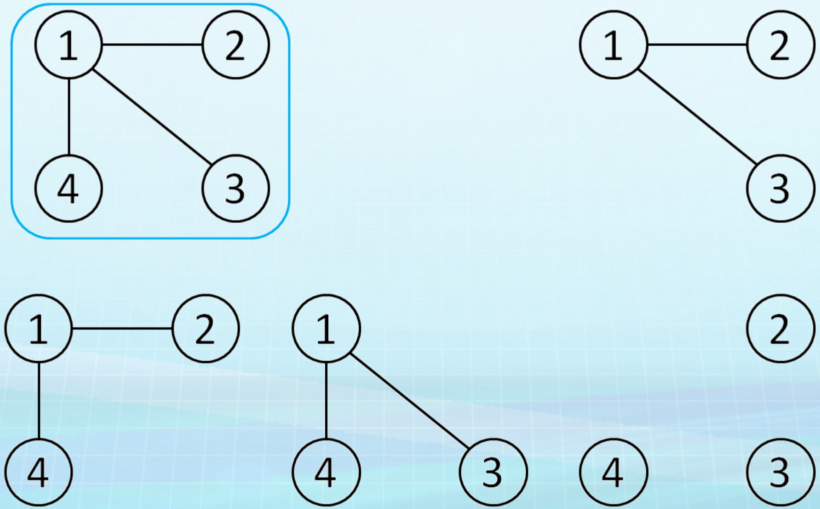
- 閉路が存在せず，すべての点がつながっていない



欲張り法

◆最小木問題

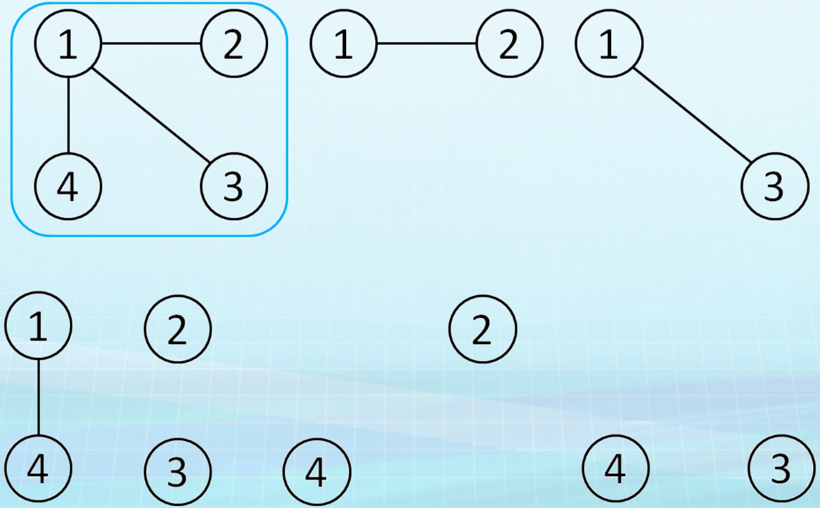
- 閉路が存在しない，すべての点がつながっている



欲張り法

◆最小木問題

- 閉路が存在しない，すべての点がつながっている(続き)



欲張り法

◆最小木問題

最小化 $z = \displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i<j}} c_{ij}x_{ij}$

制約条件 $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i<j}} x_{ij} = |V| - 1$

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S\\ i<j}} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subseteq V)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad ((i,j) \in E,\ i < j)$$

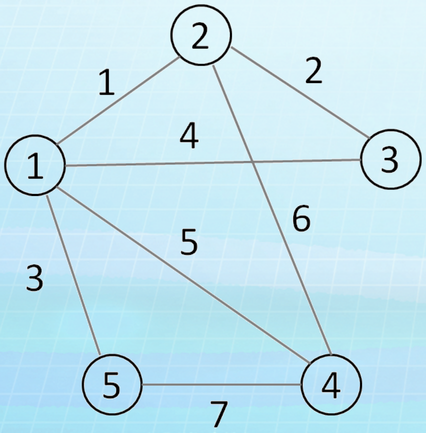
欲張り法

◆最小木問題

最小化 $z = x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 3x_{15} + 2x_{23} + 6x_{24} + 7x_{45}$

制約条件
$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{45} = 4$$
$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} \leq 3$$
$$x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{23} \leq 3$$
$$x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{24} + x_{45} \leq 3$$
$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{45} \leq 3$$
$$x_{23} + x_{24} + x_{45} \leq 3$$

続く

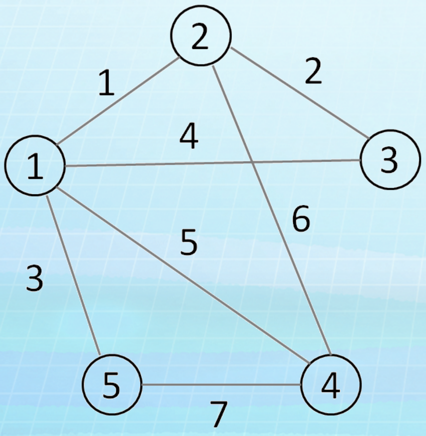


欲張り法

◆最小木問題

最小化 $z = x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 3x_{15}$
$+ 2x_{23} + 6x_{24} + 7x_{45}$

制約条件　　続き



$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2, \quad x_{12} + x_{14} + x_{24} \leq 2$$
$$x_{13} + x_{14} \leq 2, \quad x_{23} + x_{24} \leq 2$$
$$x_{12} + x_{15} \leq 2, \quad x_{13} + x_{15} \leq 2$$
$$x_{23} \leq 2, \quad x_{14} + x_{15} + x_{45} \leq 2$$
$$x_{24} + x_{45} \leq 2, \quad x_{45} \leq 2$$
$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{45} \in \{0, 1\}$$

欲張り法

◆クラスカル法

(1) 枝を長さの短い順に並べ替える

枝$e_k \in E$の長さをa_kとすると,

$$a_1 \ \le \ a_2 \le \cdots \le a_{|E|}$$

$$T \leftarrow \{e_1\},\, m \leftarrow 2$$

(2) $T \cup \{e_m\}$が閉路を含まないならば, $T \leftarrow T \cup \{e_m\}$

閉路を含むならTは変更しない

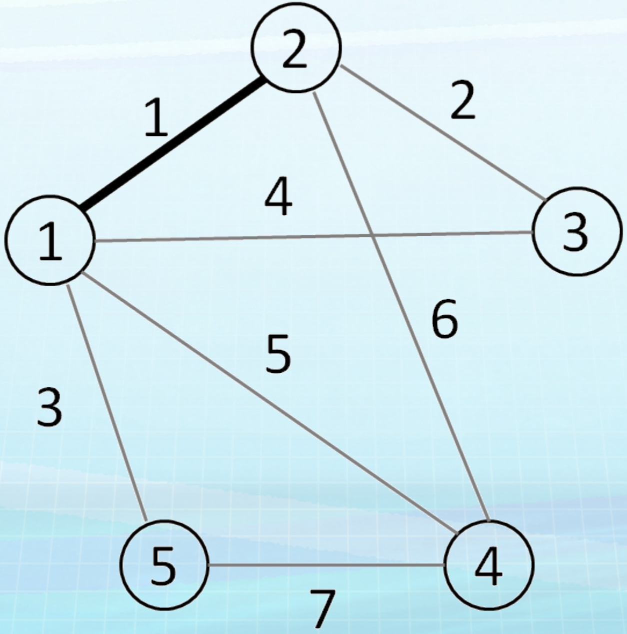
(3) Tがすべての点を結んでいるならば終了

そうでなければ, $m \leftarrow m+1$として, (2)に戻る

欲張り法

◆クラスカル法

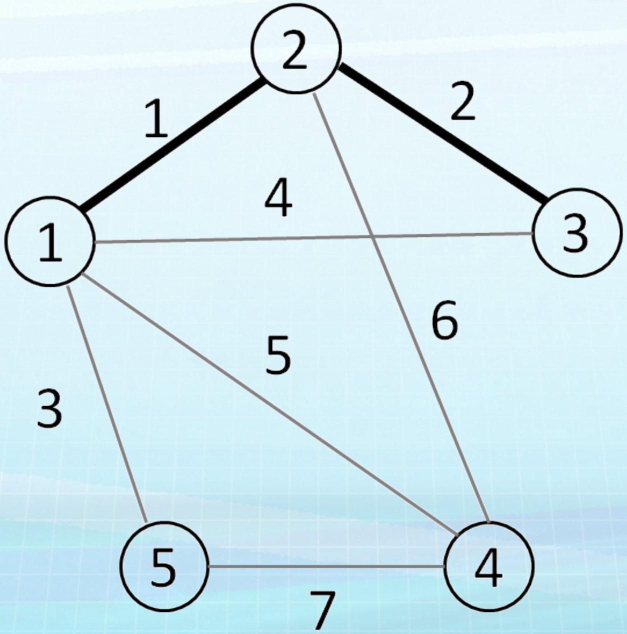
初期化



欲張り法

◆クラスカル法

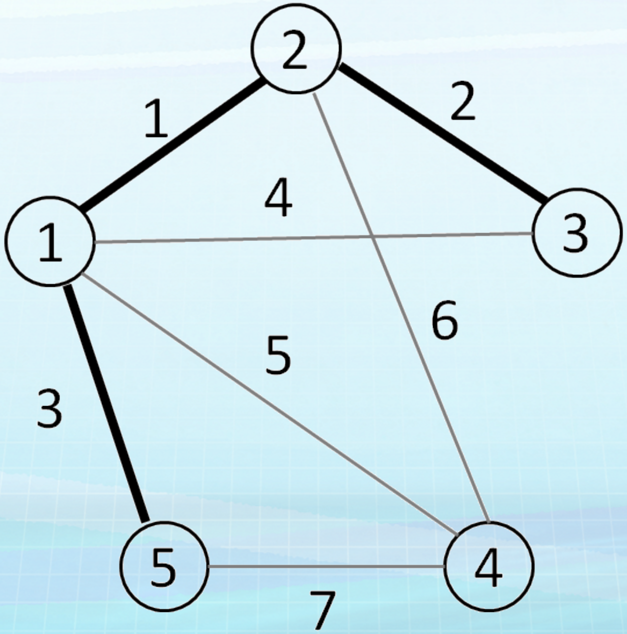
$m = 2$



欲張り法

◆クラスカル法

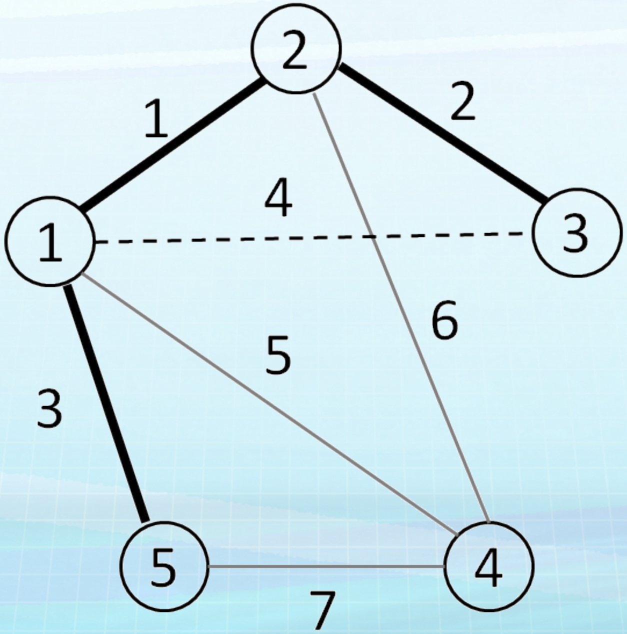
$m = 3$



欲張り法

◆クラスカル法

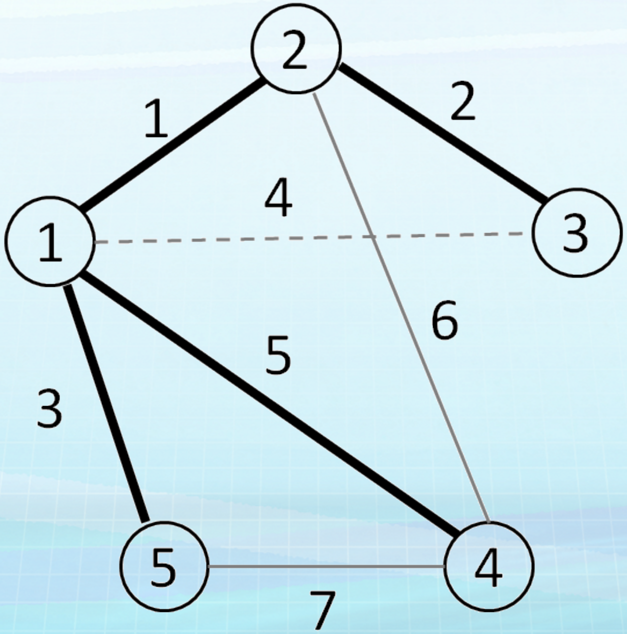
$m = 4$



欲張り法

◆クラスカル法

$m = 5$



欲張り法

- 解を段階的に構成していく際に，その段階で最善のものを取り入れていく方法
- 一般には最適解が得られる保証はない
- 近似解法
- クラスカル法は最小木問題における欲張り法
- 最小木問題はクラスカル法により最適解を得る保証

分枝限定法

分枝限定法

◆ナップサック問題

- n個の品物
- 品物iは重さa_iで価値がc_i
- ナップサックに最大で重さb詰められる
- 価値の合計が最大になるにはどの品物を詰めるべきか

分枝限定法

◆ナップサック問題

プロジェクトの採否

- n件のプロジェクトの予算申請
- プロジェクトiは費用a_iで効果がc_i
- 予算はb
- 予算内で効果が最大になるよう
  プロジェクトの採否を決定

分枝限定法

◆ナップサック問題

通信ネットワーク

- n件の接続要求
- 接続要求iは優先度c_iで帯域幅a_iを使用
- 使用可能帯域幅はb
- 使用可能帯域幅内で優先度の和が最大になるよう接続許可を決定

分枝限定法

◆ナップサック問題

- 品物iをナップサックに詰める時は$x_i = 1$
  詰めない時は$x_i = 0$
- 目的関数zは詰め込んだ品物の価値の総和

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

- ナップサックの容量制約は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

分枝限定法

◆ナップサック問題

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{制約条件}\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

- ナップサック問題の解は変数の整数条件を外した線形最適化問題の解とは一般には一致しない
- 欲張り法も最適解が得られる保証はない

分枝限定法

◆ナップサック問題

最適解

i	1	2	3	4	5
c_i	9	7	6	5	3
a_i	6	4	5	3	3
b	17				
x_i	1	1	0	1	1
z	24				
$\sum a_i x_i = 16$					

欲張り法の解

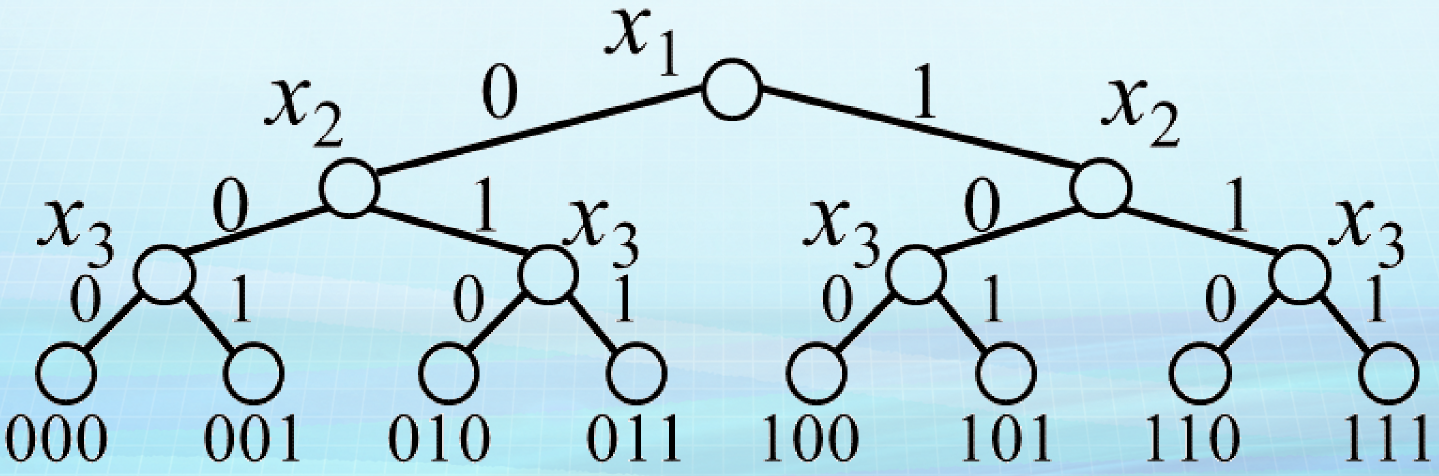
i	1	2	3	4	5
c_i	9	7	6	5	3
a_i	6	4	5	3	3
b	17				
x_i	1	1	1	0	0
z	22				
$\sum a_i x_i = 15$					

線形最適化法

i	1	2	3	4	5
c_i	9	7	6	5	3
a_i	6	4	5	3	3
b	17				
x_i	1	1	0.8	1	0
z	25.8				
$\sum a_i x_i = 17$					

分枝限定法

$$IP \begin{cases} \text{最大化} & z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{cases}$$



分枝限定法

- 変数の整数制約を外した線形最適化問題LP
- 緩和問題

$$LP\left\{\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 9 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1 \end{array}\right.$$

- IPの最大値 $\leq$ LPの最大値
- LPの解はIPの制約を満たすとは限らない

分枝限定法

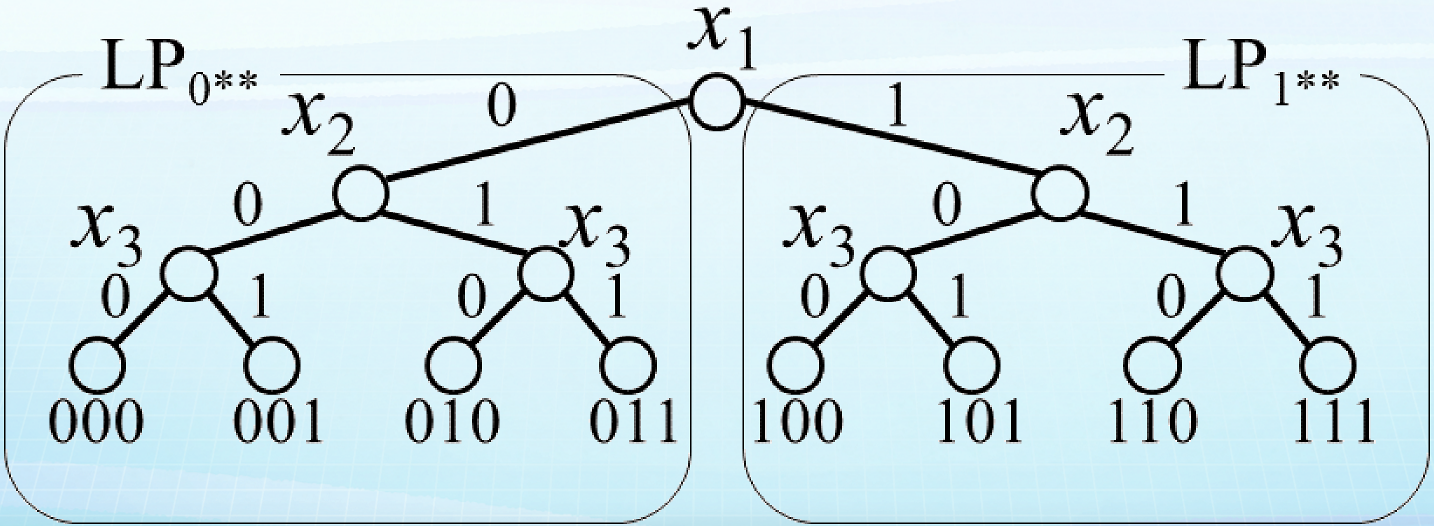
- $x_1 = 0$

$$LP_{0**}\left\{\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 9 \\ & x_1 = 0, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \end{array}\right.$$

- $x_1 = 1$

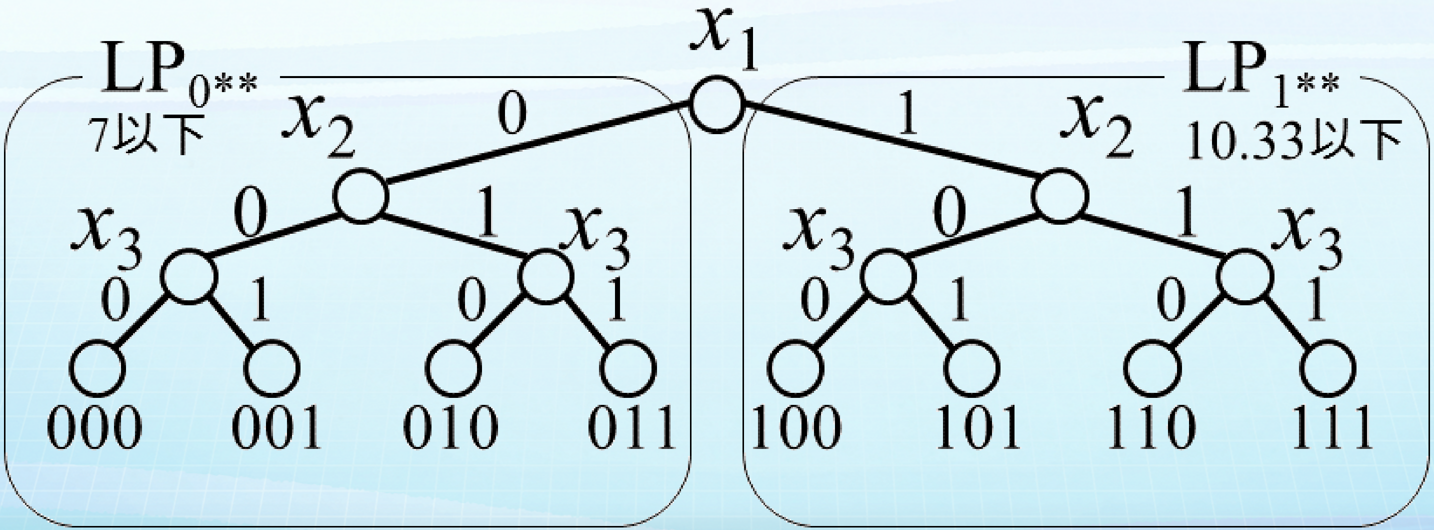
$$LP_{1**}\left\{\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 9 \\ & x_1 = 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \end{array}\right.$$

分枝限定法



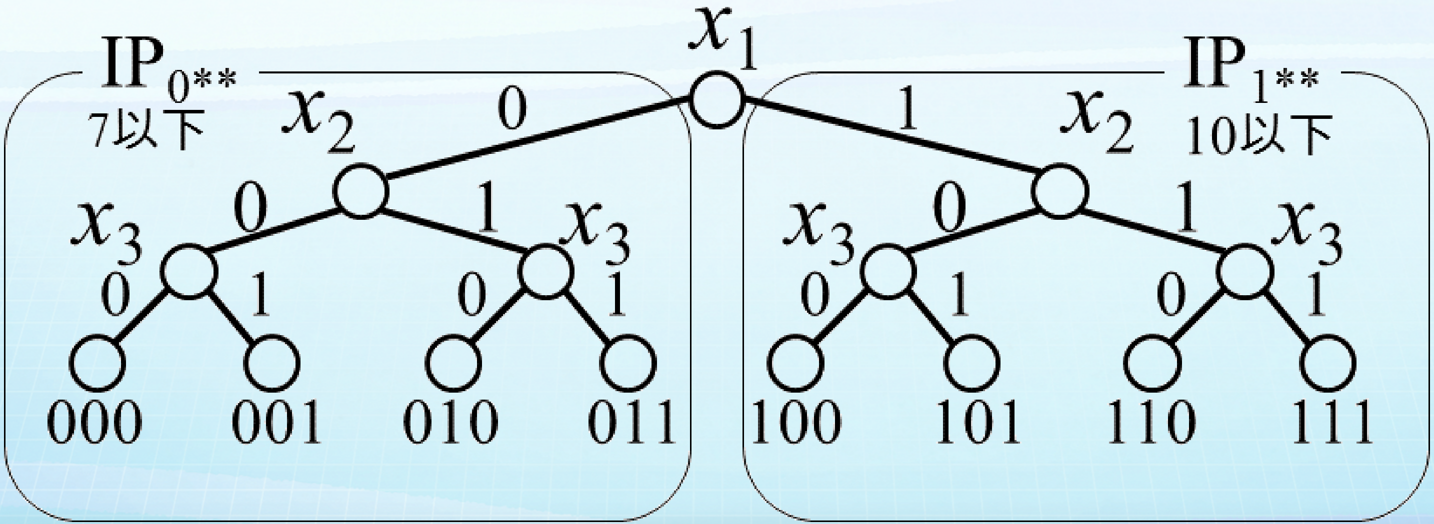
x_1
LP_{0**}
LP_{1**}
0
1
x_2
x_2
0
1
0
1
x_3
x_3
x_3
x_3
0
1
0
1
0
1
0
1
000
001
010
011
100
101
110
111

分枝限定法

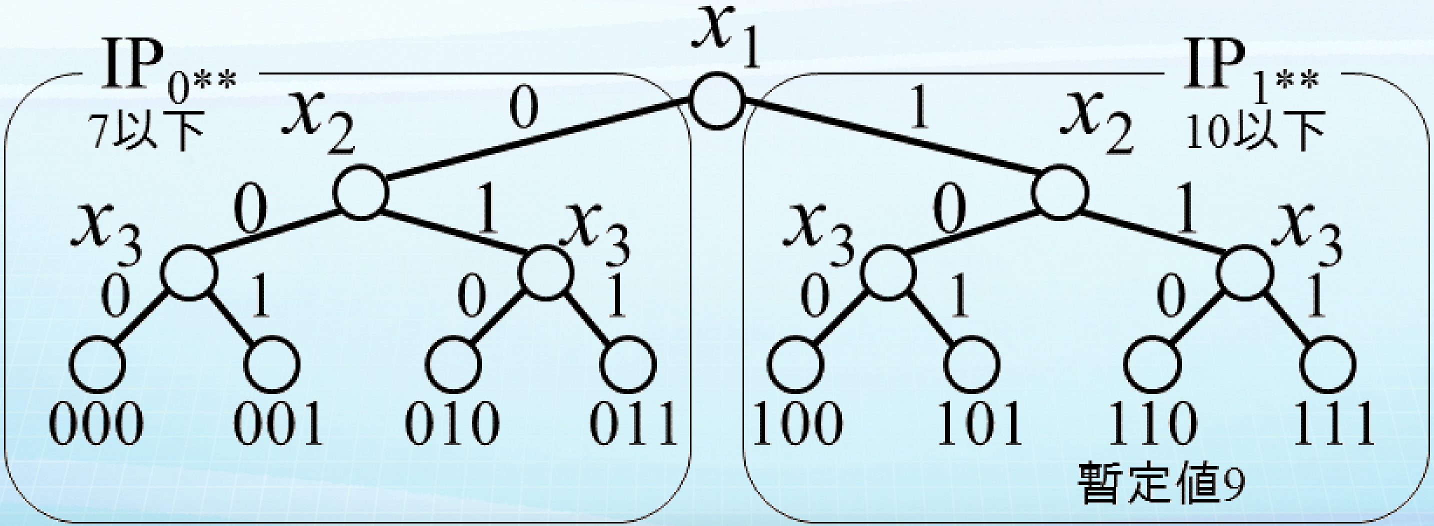


x_1
LP_{0**}
7以下
LP_{1**}
10.33以下
x_2
x_2
x_3
x_3
x_3
x_3
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
000
001
010
011
100
101
110
111

分枝限定法

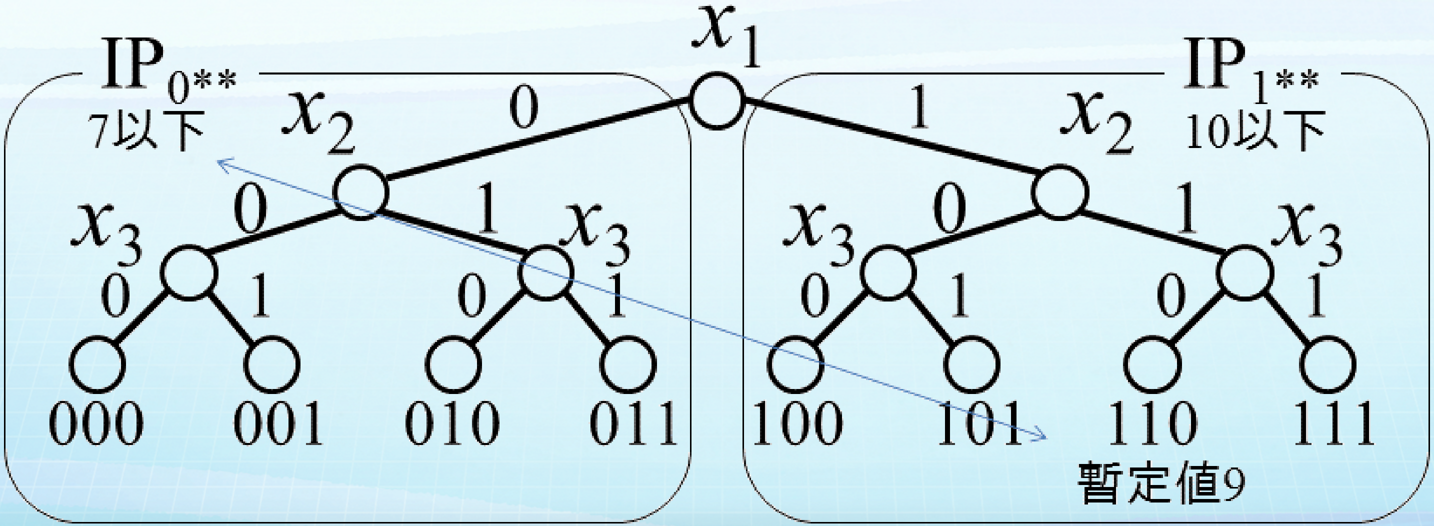


分枝限定法



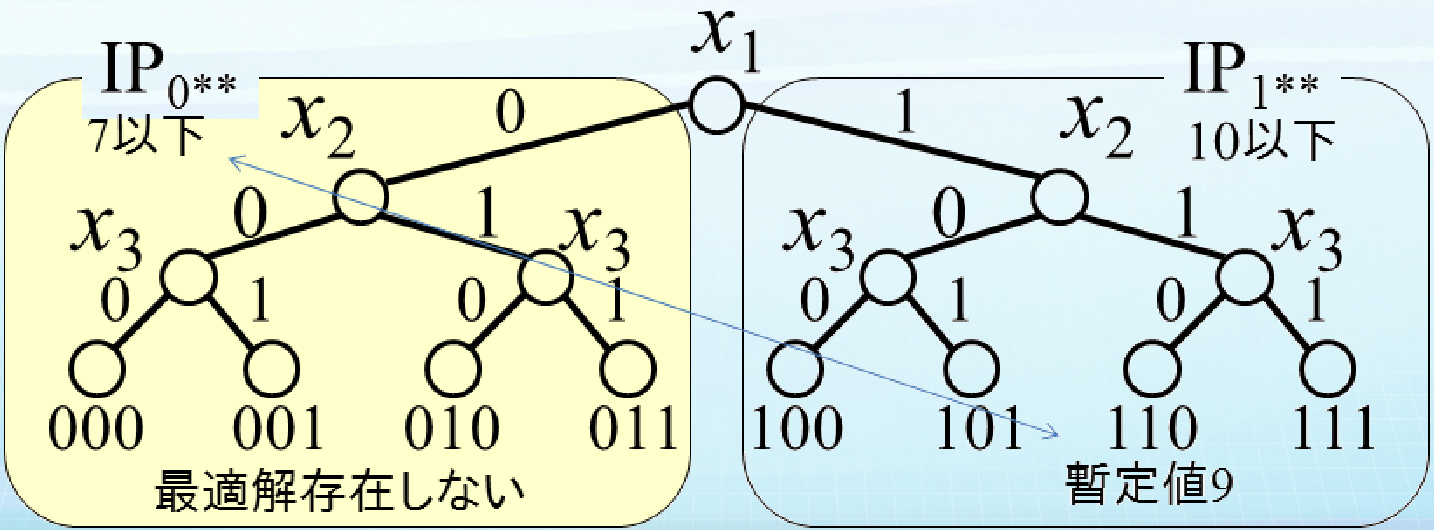
x_1
IP_{0**}
7以下
IP_{1**}
10以下
x_2
x_2
x_3
x_3
x_3
x_3
0
1
000
001
010
011
100
101
110
111
暫定値9

分枝限定法



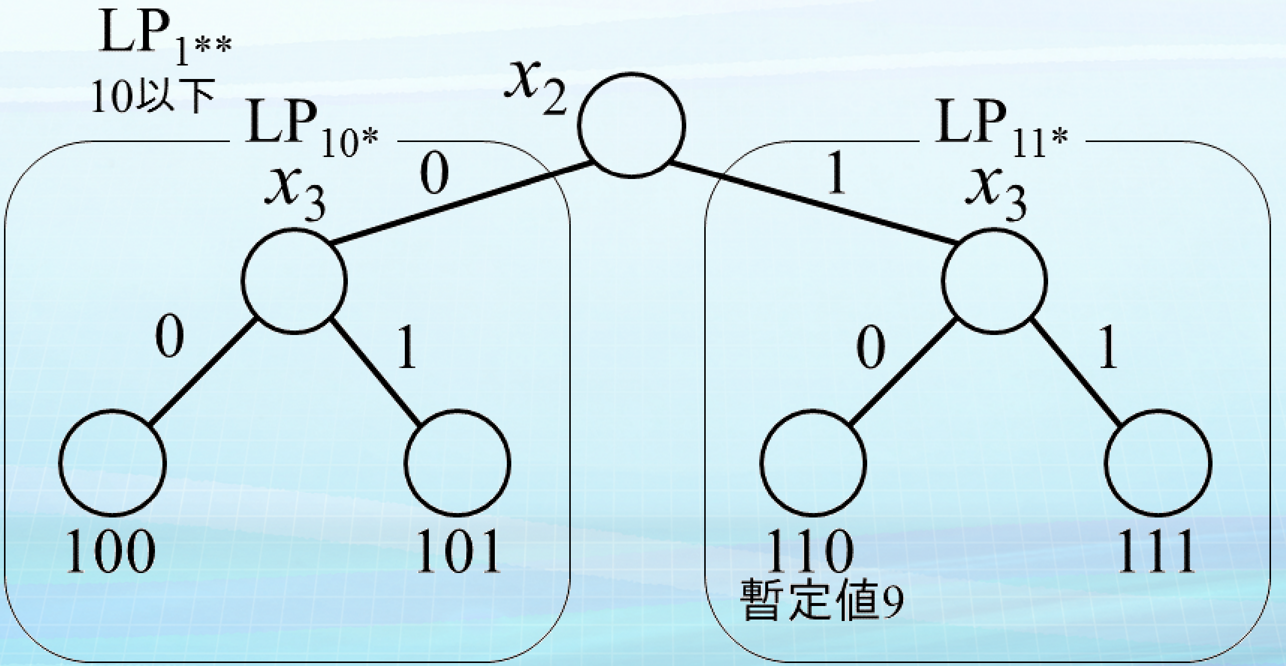
x_1
IP_{0**}
7以下
IP_{1**}
10以下
x_2
x_2
0
1
x_3
x_3
x_3
x_3
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
000
001
010
011
100
101
110
111
暫定値9

分枝限定法

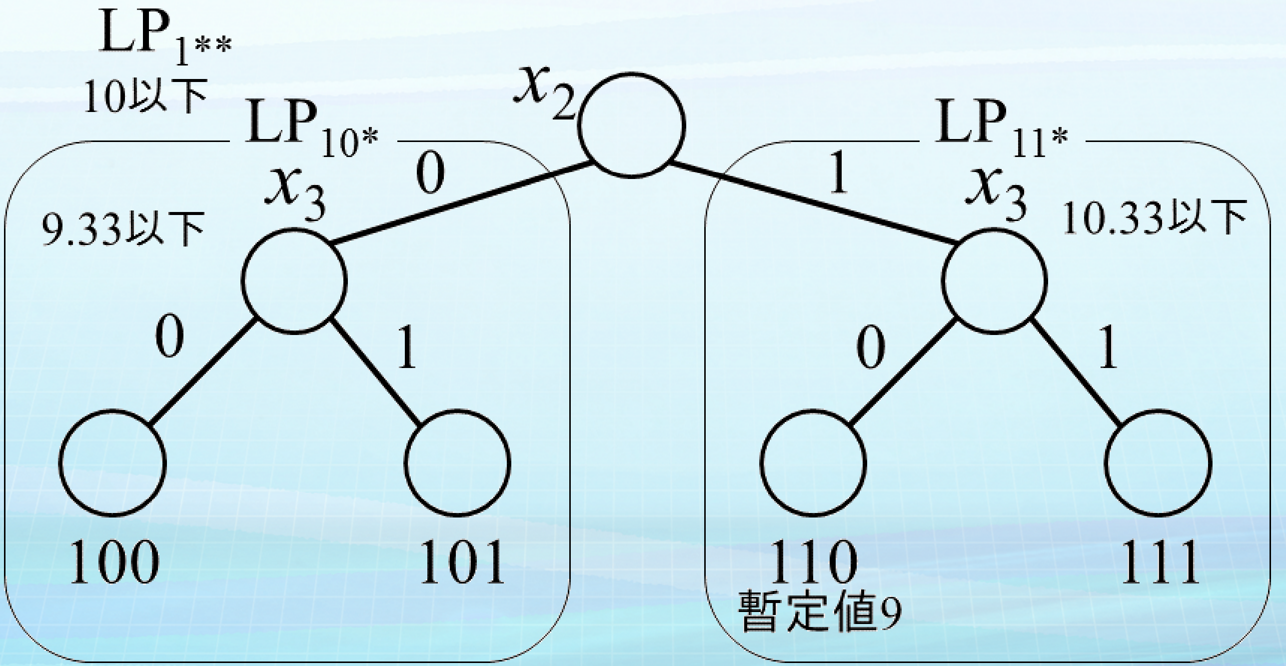


x_1
IP_{0**}
7以下
x_2
0
x_3
0
1
x_3
0
1
0
1
000
001
010
011
最適解存在しない
IP_{1**}
10以下
1
x_2
x_3
0
1
x_3
0
1
0
1
100
101
110
111
暫定値9

分枝限定法

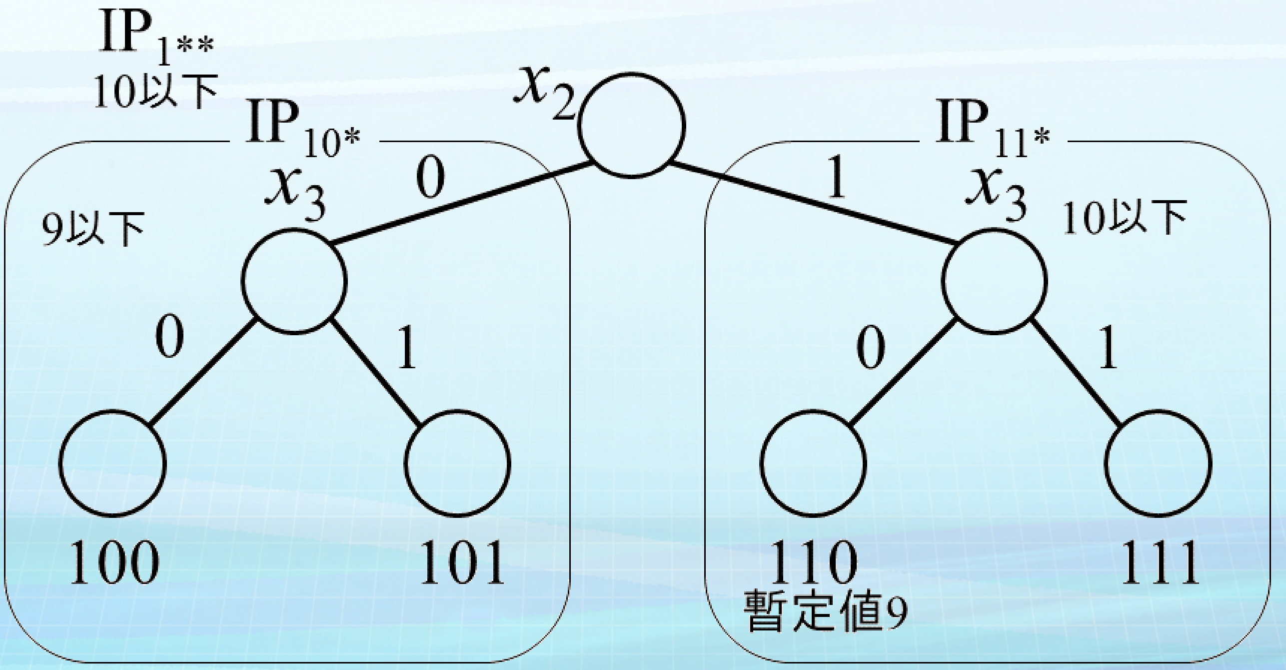


分枝限定法



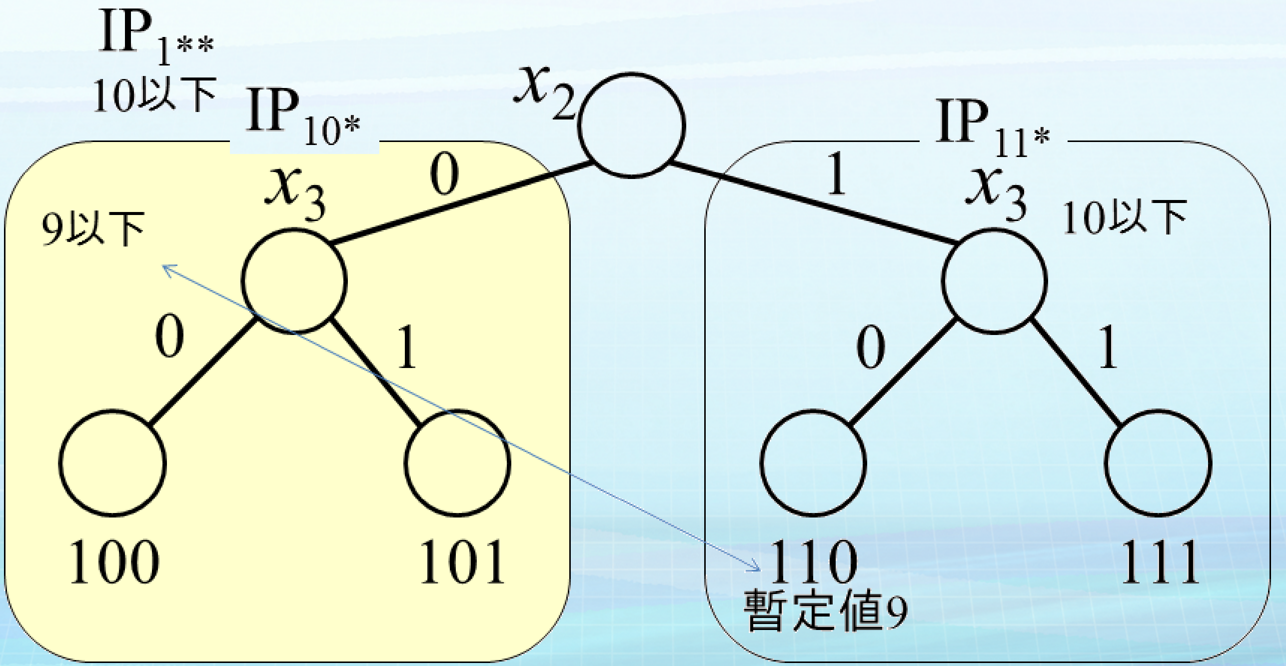
LP1**
10以下
LP10*
x2
LP11*
0
1
x3
x3
9.33以下
10.33以下
0
1
0
1
100
101
110
暫定値9
111

分枝限定法



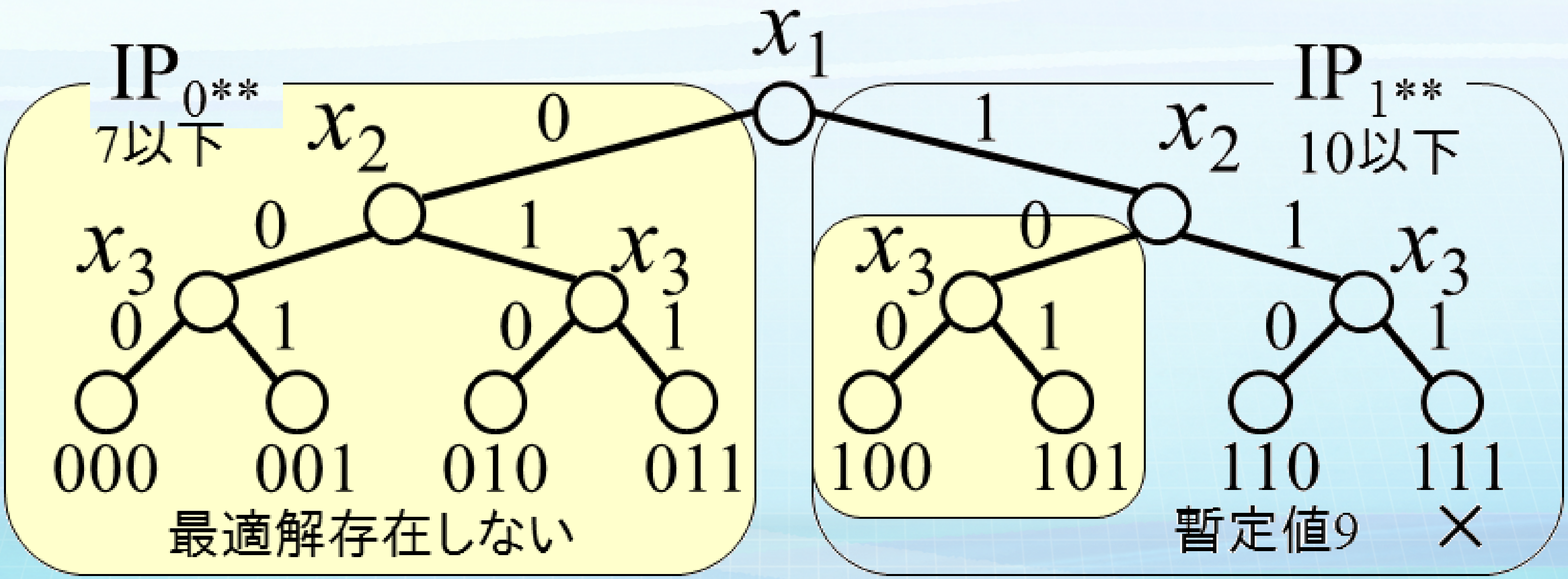
IP_{1**}
10以下
IP_{10*}
x_2
IP_{11*}
0
1
x_3
x_3
9以下
10以下
0
1
0
1
100
101
110
暫定値9
111

分枝限定法



IP_{1**}
10以下
IP_{10*}
x_2
IP_{11*}
0
1
x_3
x_3
9以下
10以下
0
1
0
1
100
101
110
111
暫定値9

分枝限定法



x_1
IP_{0**}
7以下
IP_{1**}
10以下
0
1
x_2
x_2
0
1
0
1
x_3
x_3
x_3
x_3
0
1
0
1
0
1
0
1
000
001
010
011
100
101
110
111
最適解存在しない
暫定値9
×

動的計画法

動的計画法

最大化 $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

制約条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$

最大化 $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

制約条件 $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

動的計画法

- 品物$1, 2, ..., n$の組み合わせ
- 重さの和がk以下での価値の和の最大値を$f(n, k)$

$$f(n,k) = \max\{f(n-1,k), f(n-1,k-a_n)+c_n\}$$

- $0 \le k \le b$

動的計画法

- 品物$1, 2, \ldots, n$の組み合わせ
- 重さの和がk以下での価値の和の最大値を$f(n, k)$

$$f(n,k) = \max\{\underline{f(n-1,k)}, f(n-1,k-a_n)+c_n\}$$

- $0 \leq k \leq b$
- 品物nを加えない場合に価値の和最大

動的計画法

- 品物$1, 2, ..., n$の組み合わせ
- 重さの和がk以下での価値の和の最大値を$f(n, k)$

$$f(n,k) = \max\{f(n-1,k), \underline{f(n-1,k-a_n)+c_n}\}$$

- $0 \le k \le b$
- 品物nを加える場合に価値の和最大

動的計画法

- 品物$1, 2, ..., n$の組み合わせ
- 重さの和がk以下での価値の和の最大値を$f(n, k)$

$$f(n, k) = \max\{f(n-1, k), f(n-1, k-a_n) + c_n\}$$

- $0 \leq k \leq b$
- $f(1, k)$は簡単に計算できる
- $f(1, k)$の結果を利用し，$f(2, k)$, ..., $f(n, k)$を計算

動的計画法

- $f(1,k)$ は品物 1 を対象

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\
\text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

- $0 \leq k < 3$　品物 1 を詰め込めない

$$f(1,k) = 0$$

- $3 \leq k \leq 9$　品物 1 を詰め込める

$$f(1,k) = 3$$

動的計画法

- $f(2,k)$ は品物 1 と 2 を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- $k = 0, 1, 2$　どの荷物も詰め込めない

$$\begin{aligned} f(2,k) &= \max\{f(1,k), f(1,k-6)+4\} \\ &= \max\{0, \text{実行不能}\} = 0 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(2,k)$は品物1と2を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

- $k = 3, 4, 5$　品物1だけ詰め込める

$$\begin{aligned} f(2,k) &= \max\{f(1,k), f(1,k-6)+4\} \\ &= \max\{3, \text{実行不能}\} = 3 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(2,k)$ は品物1と2を対象

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- $k = 6, 7, 8$　品物1と2の一方だけ詰め込める

$$\begin{aligned} f(2,k) &= \max\{f(1,k), f(1,k-6)+4\} \\ &= \max\{3, 0+4\} = 4 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(2,k)$ は品物 1 と 2 を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

- $k = 9$　品物 1 と 2 を両方詰め込める

$$\begin{aligned} f(2,9) &= \max\{f(1,9), f(1,9-6)+4\} \\ &= \max\{3, 3+4\} = 7 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$ は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- $k = 0, 1, 2$ 　どの荷物も詰め込めない

$$\begin{aligned} f(3,k) &= \max\{f(2,k), f(2,k-4)+6\} \\ &= \max\{0, \text{実行不能}\} = 0 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$ は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- $k = 3$ 品物1だけ詰め込める

$$\begin{aligned} f(3,3) &= \max\{f(2,3), f(1, 3-4) + 6\} \\ &= \max\{3, \text{実行不能}\} = 3 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- $k = 4, 5$　品物1, 3の1個詰め込める

$$\begin{aligned} f(3,k) &= \max\{f(2,k), f(2,k-4)+6\} \\ &= \max\{3, 0+6\} = 6 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$ は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- $k=6$ 　品物1, 2, 3の1個詰め込める

$$\begin{aligned} f(3,6) &= \max\{f(2,6), f(2,6-4)+6\} \\ &= \max\{4, 0+6\} = 6 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$ は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

- $k = 7, 8$　品物1, 2, 3の1個 or 品物1と3を詰め込める

$$\begin{aligned} f(3,k) &= \max\{f(2,k), f(2,k-4)+6\} \\ &= \max\{4, 3+6\} = 9 \end{aligned}$$

動的計画法

- $f(3,k)$ は品物1, 2, 3を対象

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

- $k = 9$　品物1, 2, 3の1個 or 品物1と2 or 品物1と3を詰め込める

$$\begin{aligned} f(3,9) &= \max\{f(2,9), f(2,9-4)+6\} \\ &= \max\{7, 3+6\} = 9 \end{aligned}$$

動的計画法

- ナップサック問題における計算量
  $i = 1, 2, ..., n$ に関して，$f(i, 0), f(i, 1), ..., f(i, b)$ を計算
  $n \times (b + 1)$ 回の計算で済む

- 最適性の原理が成り立つ
  必要条件
  十分条件ではない
- 制約が少ない問題