Excel で学ぶ意思決定理論
予習教材

担当：大西 仁

https://info.ouj.ac.jp/∼maps17/

統計的意思決定

期待値

- サイコロを1回振って出る目の期待値(平均)

$$\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 2+\ldots+\frac{1}{6}\times 6=3.5$$

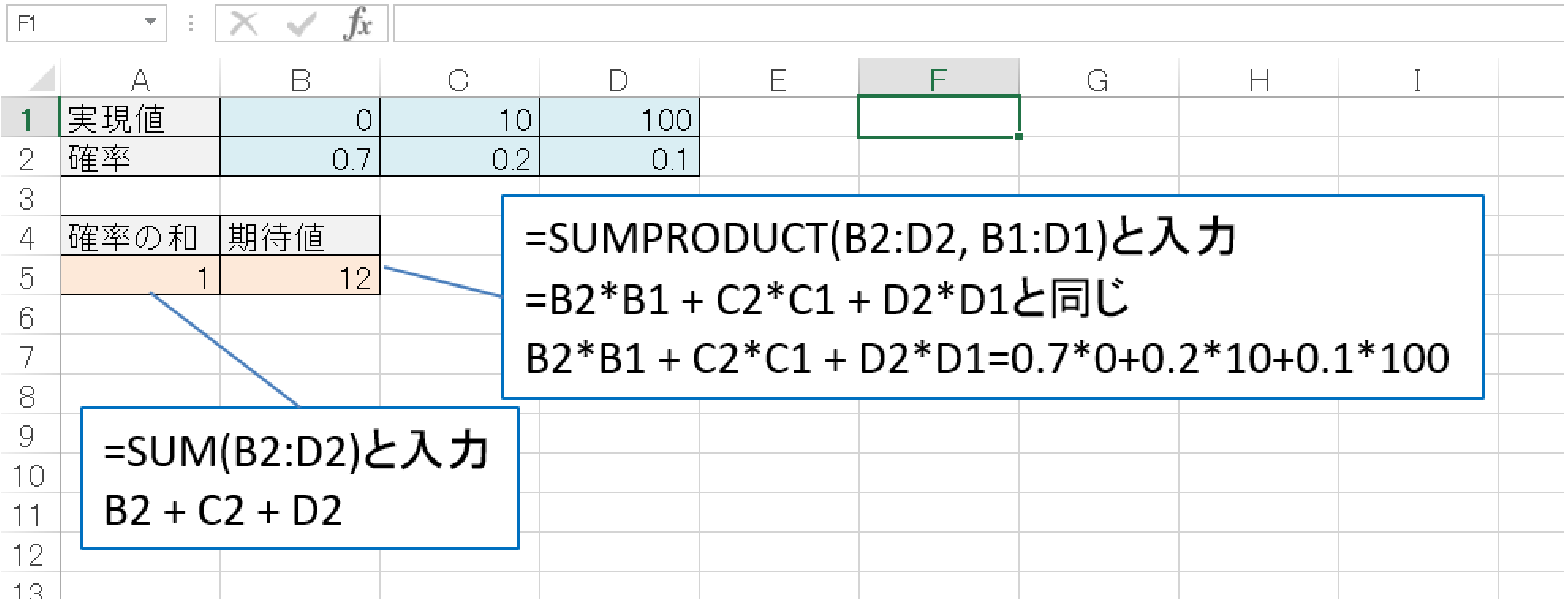
- 確率0.7で何ももらえず，確率0.2で10円もらえ，確率0.1で100円もらえるくじを1回引いた時のもらえる金額の期待値

$$0.7\times 0+0.2\times 10+0.1\times 100=12$$

- 確率変数Xが$x_1, x_2, \ldots, x_n$の各値をとる確率が$P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($P_1+P_2+\ldots+P_n=1$) とすると，Xの期待値$E[X]$は

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n$$

Excelで期待値を計算



- =SUMPRODUCT(B2:D2, B1:D1) はB2*B1 + C2*C1 + D2*D1を計算
  =B2*B1 + C2*C1 + D2*D1と同じ
  $0.7 * 0 + 0.2 * 10 + 0.1 * 100 = 12$
- =SUM(B2:D2) は B2 + C2 + D2 を計算 ⋯ 確率の和が1を確認

統計的意思決定

- 100本のくじがある
- 70本は何ももらえず，20本は10円もらえ，10本は100円もらえる
- くじを1回引いた時のもらえる金額の期待値

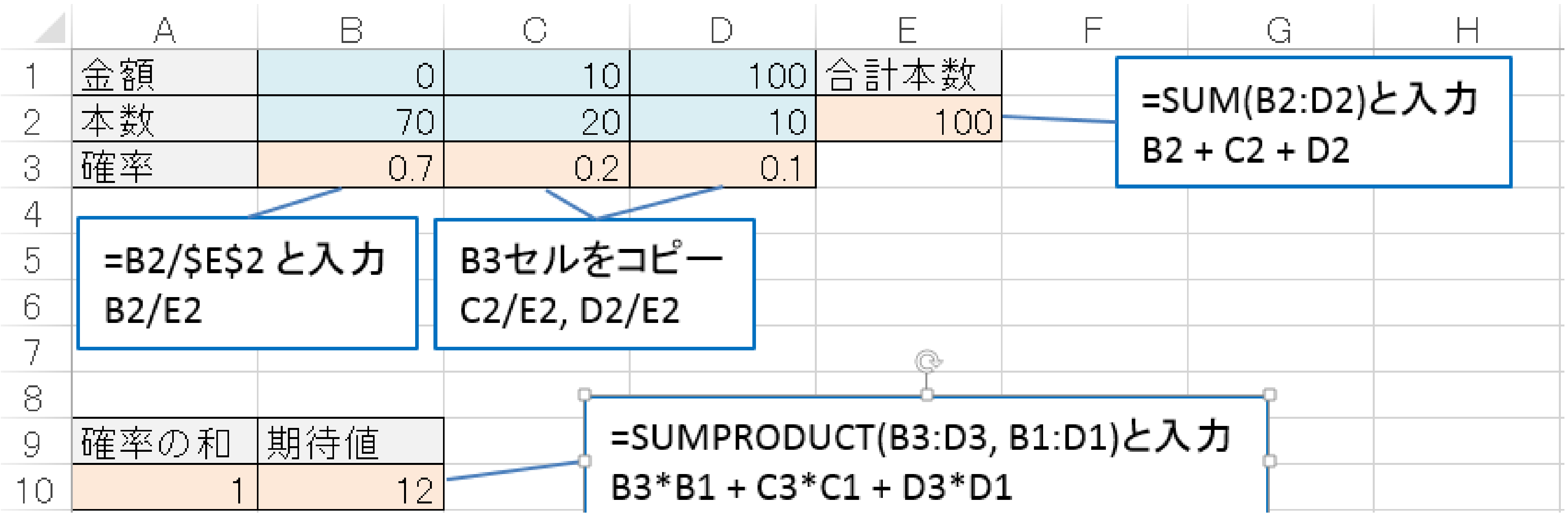
$$(70/100) \times 0 + (20/100) \times 10 + (10/100) \times 100 = 12$$

期待効用最大化原理のエッセンス

- 単純に金額で好ましさ（効用）を評価するなら，くじを1回引くための料金が12円以下の場合のみくじを引くべき
- 一般に，効用と得る金額は直線関係にはない
- くじを引くこと自体が効用の一部（e.g. わくわく感）かも

統計的意思決定

Excelで期待値を計算



- ある金額のくじが出る確率は，その金額のくじの本数/合計本数
- E2 は E2セルを絶対番地として参照する
  - B3セルの内容をC3セルへコピーすると，=C2/E2 となる
  - B2 はコピーで番地が変わる（相対参照）が，E2 (E2) はコピーで番地が変わらない(絶対参照)

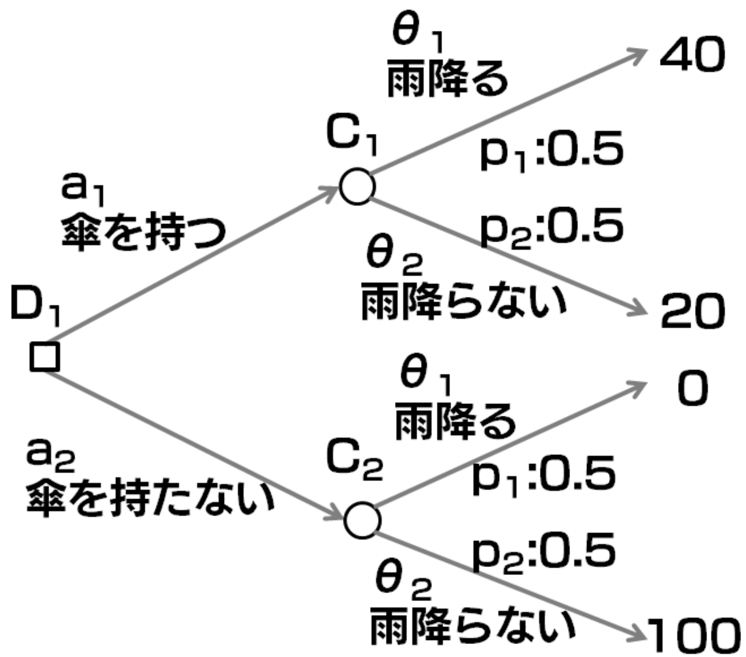
期待効用に基づく決定

雨の日の外出

- 雨が降る確率は0.5
- 傘を持って外出，雨が降った $\cdots$ 効用は40
- 傘を持って外出，雨が降らなかった $\cdots$ 効用は20
- 傘を持たずに外出，雨が降った $\cdots$ 効用は0
- 傘を持たずに外出，雨が降らなかった $\cdots$ 効用は100
- 傘を持って外出するべきか？

期待効用に基づく決定

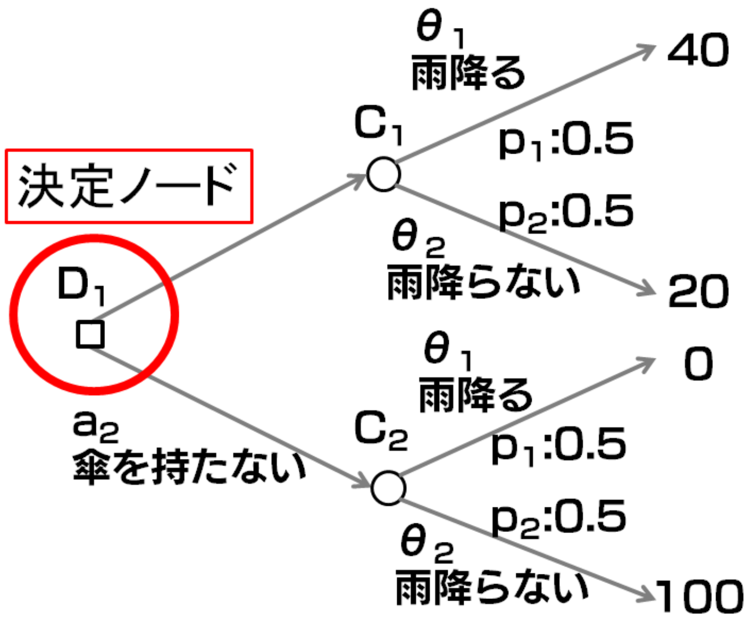
決定木



- ディシジョントゥリー
  (Decision Tree)
- 意思決定問題を表現するツール

期待効用に基づく決定

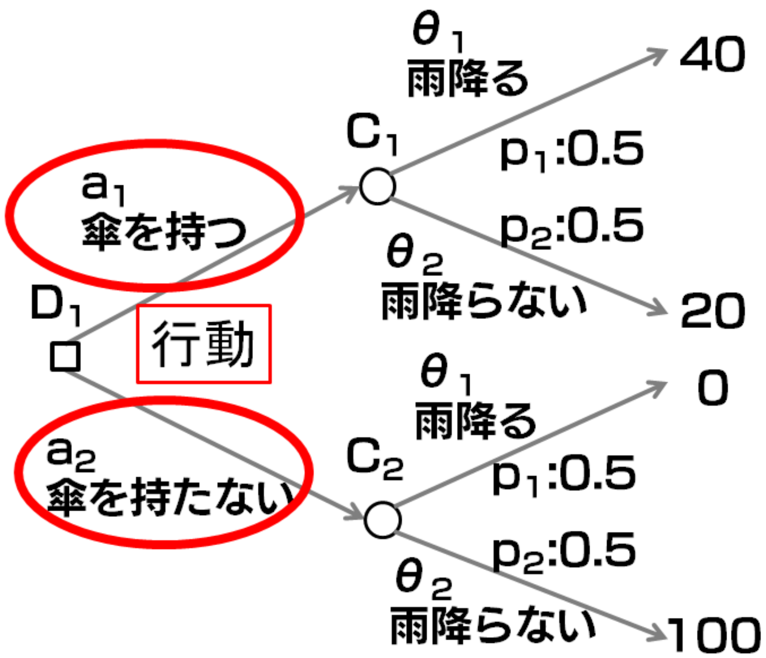
決定木



- 四角い点 … 決定ノード
- 意思決定 … 代替案の選択を行う

期待効用に基づく決定

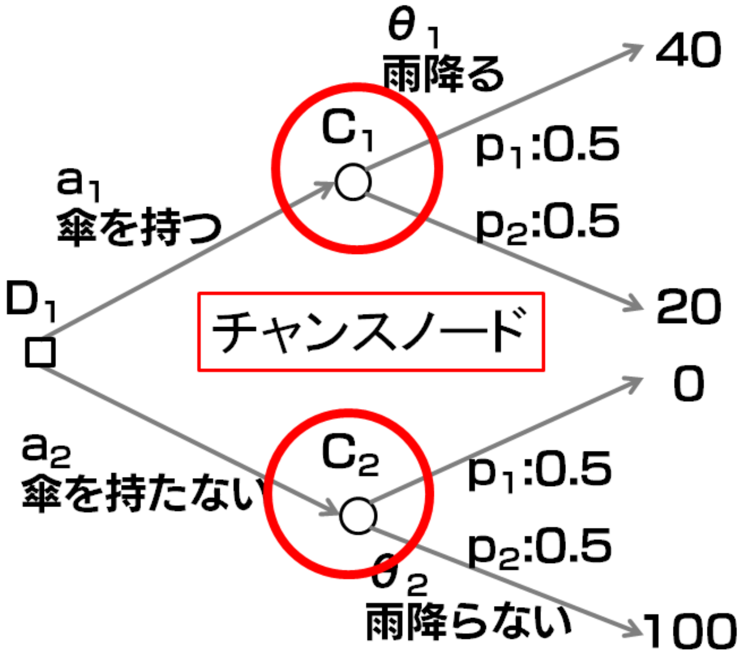
決定木



- 四角い点 ⋯ 決定ノード
- 意思決定 ⋯ 代替案(行動)の選択を行う
  - 傘を持って出かける (a_1)
  - 傘を持たずに出かける (a_2)

期待効用に基づく決定

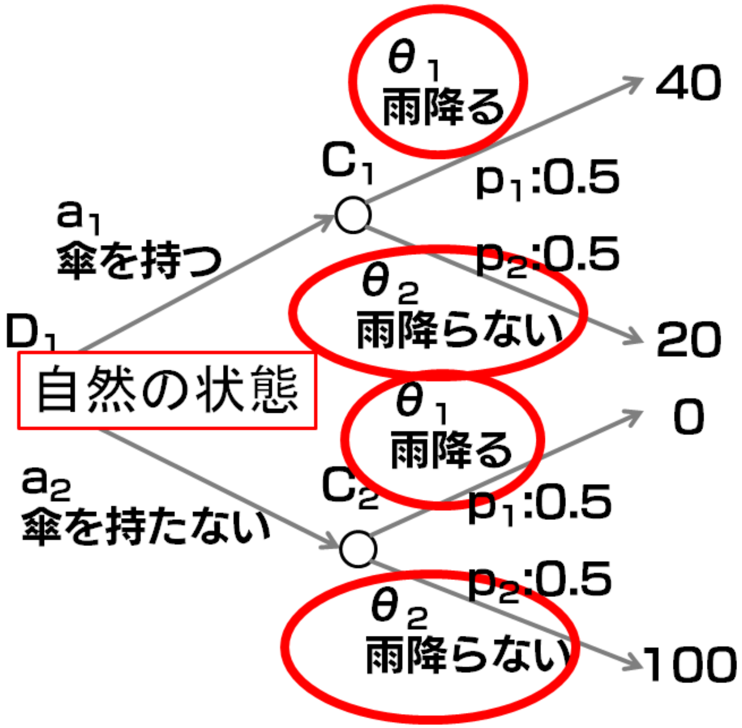
決定木



- 丸い点 ··· チャンスノード
- どの事象が生じるかが決まる
- 意思決定者の意思決定や努力とは無関係に生じる事象が決まる
- 天候のように意思決定者がコントロールができない，事象の決定

期待効用に基づく決定

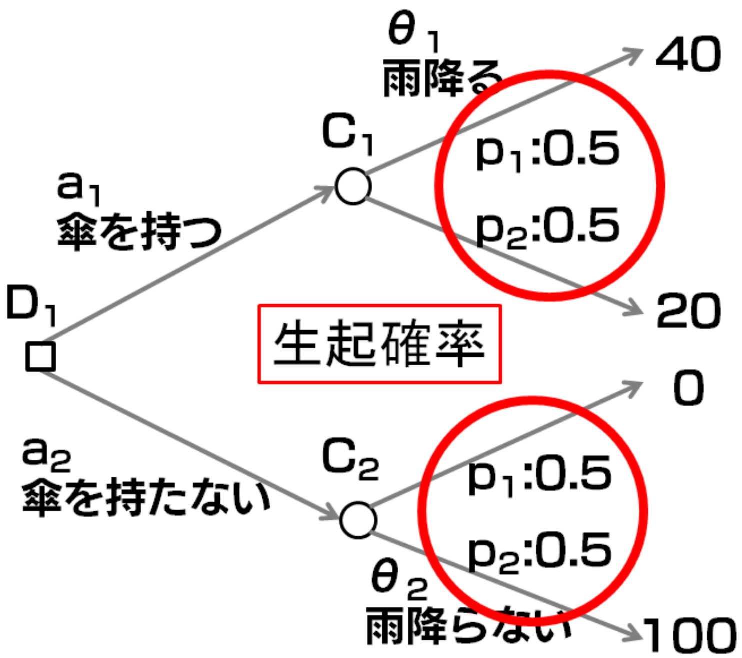
決定木



- 結果として生じる事象
  … 自然の状態
- 天候のように，意思決定者がコントロールができなく，ゲーム理論における相手のプレイヤーのように特定の意図を持たない決定
- 自然相手のゲーム

期待効用に基づく決定

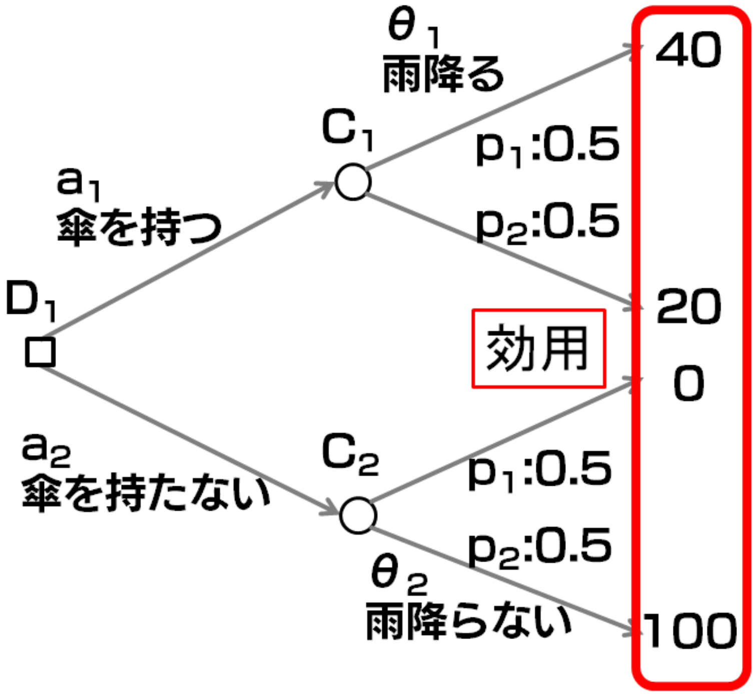
決定木



- 自然の状態は確率的に生じる
- 特定の自然の状態が生じる生起確率は枝に表現

期待効用に基づく決定

決定木



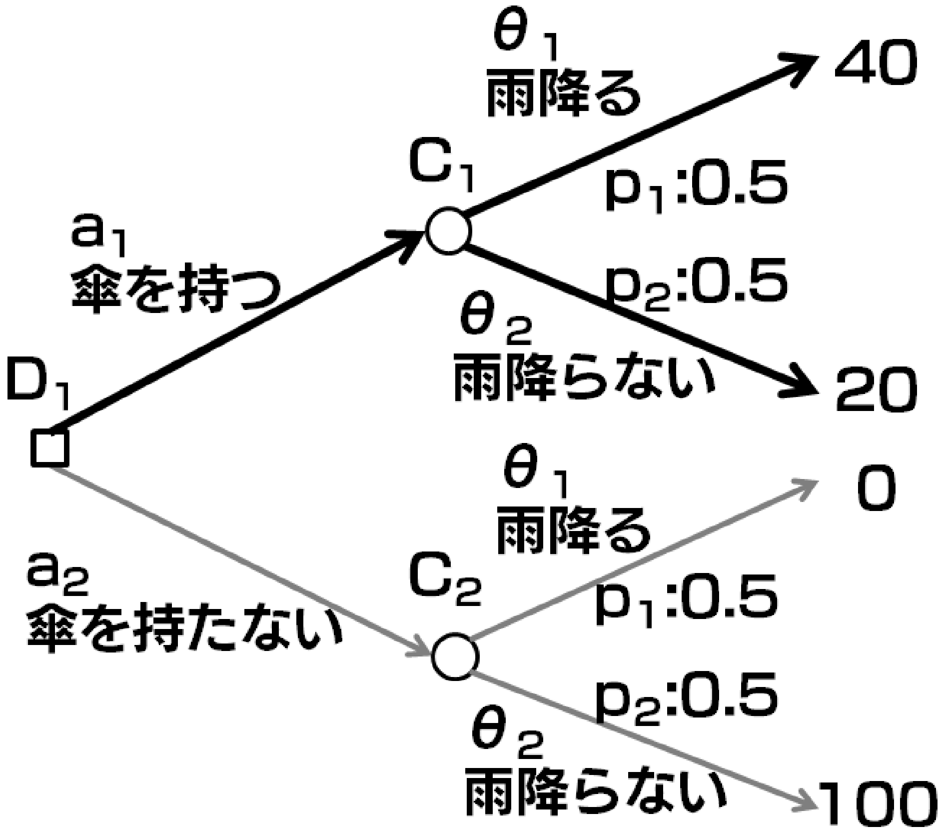
- 終点では，特定の行動をとり，特定の事象が生じた結果に対する評価(効用) を表現

期待効用に基づく決定

期待効用に基づく決定

- 効用の期待値 ⋯ **期待効用**
- 期待効用が最大になる行動をとることが合理的な決定
- 意思決定点で各行動をとった時の期待効用を計算

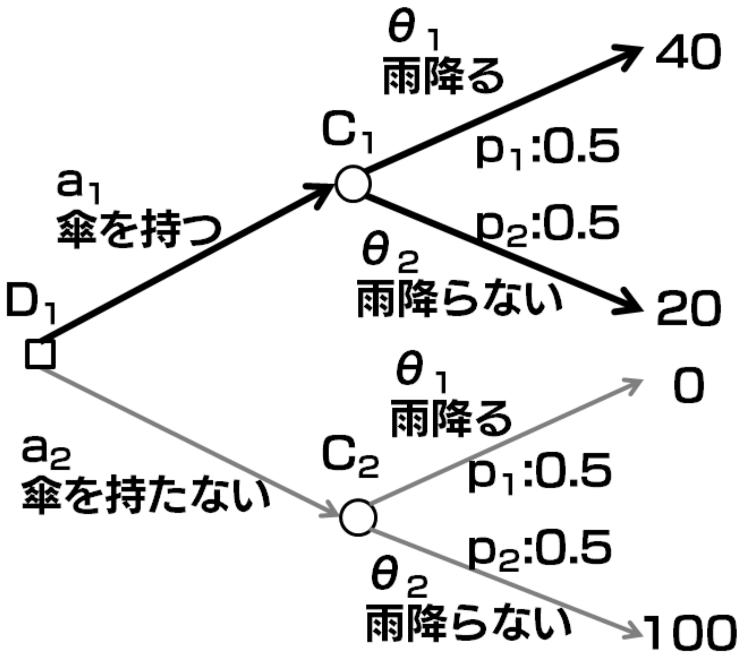
期待効用に基づく決定



θ1
雨降る
40
C1
p1:0.5
a1
傘を持つ
p2:0.5
θ2
雨降らない
D1
20
θ1
雨降る
0
a2
傘を持たない
C2
p1:0.5
p2:0.5
θ2
雨降らない
100

期待効用に基づく決定

傘を持って外出した場合… a_1



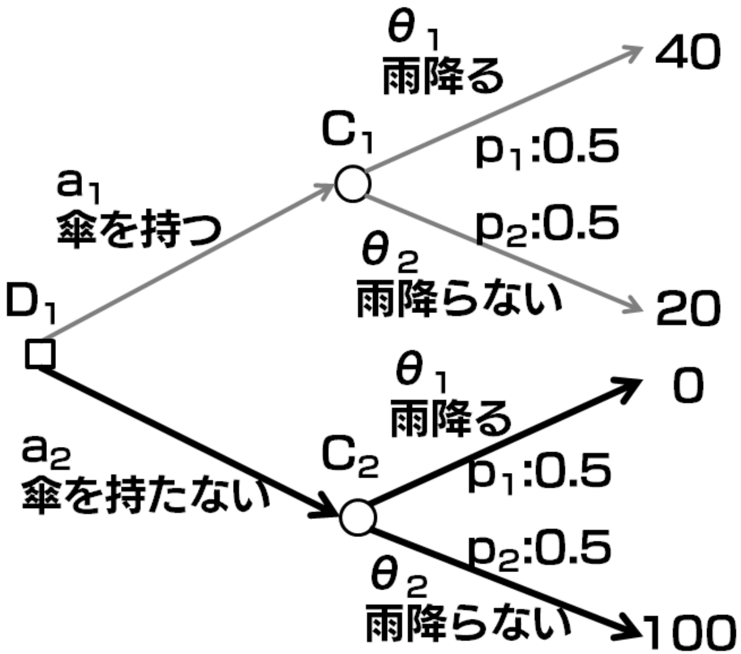
- 確率 $p_1 = P(\theta_1) = 0.5$ で雨が降る (θ_1)
- 雨が降る (θ_1) 時の効用 $u(a_1, \theta_1)$ は 40
- 確率 $p_2 = P(\theta_2) = 0.5$ で雨は降らない (θ_2)
- 雨が降らない (θ_2) 時の効用 $u(a_1, \theta_2)$ は 20

- 傘を持って外出した場合の期待効用は

$$P(\theta_1)u(a_1, \theta_1) + P(\theta_2)u(a_1, \theta_2) = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 20 = 30$$

期待効用に基づく決定

傘を持たずに外出した場合…a_2



- 確率$p_1 = P(\theta_1) = 0.5$で雨が降る(θ_1)
- 雨が降る(θ_1)時の効用$u(a_2, \theta_1)$は0
- 確率$p_2 = P(\theta_2) = 0.5$で雨は降らない(θ_2)
- 雨が降らない(θ_2)時の効用$u(a_2, \theta_2)$は100

- 傘を持たずに外出した場合の期待効用は

$$P(\theta_1)u(a_2, \theta_1) + P(\theta_2)u(a_2, \theta_2) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 100 = 50$$

期待効用に基づく決定

- 傘を持って外出した時の期待効用 $\cdots$ 30
- 傘を持たずに外出した時の期待効用 $\cdots$ 50
- 傘を持たずに外出すべき

統計的意思決定

統計学用語 (1/3)

試行 「サイコロを振る」のように繰り返し可能な行為

事象 「サイコロを振ったら1の目が出る」のように試行の結果として起こる事柄 … 以降「サイコロの1の目が出る」と略す

根元事象 「サイコロの1の目が出る」「サイコロの2の目が出る」… のようにそれ以上簡単にならない事象

- 「サイコロの1または2の目が出る」は,「サイコロの1の目が出る」と「サイコロの2の目が出る」の**和事象**で根元事象ではない

全事象 「サイコロの1の目が出る」「サイコロの2の目が出る」… 「サイコロの6の目が出る」のように，対象とする全ての根元事象の集合

統計的意思決定

統計学用語 (2/3)

確率変数 X　全事象　$U = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$　の各根元事象 $e_1, e_2, ..., e_n$ に割り当てた数値 $x_1, x_2, ..., x_n$ (実現値) のいずれかをとる変数

- 「サイコロの 1 の目が出る $\cdots$ 1」「サイコロの 2 の目が出る $\cdots$ 2」$\cdots$

確率 (関数) P　$x_1, x_2, ..., x_n$ に割り当てる確率

$$P(X = x_1), P(X = x_2), ..., P(X = x_n)$$

- $P(X = x_i)$ を $P(x_i)$，P_i と略す
- $0 \leq P(x_i) \leq 1 \quad (i = 1, 2, ..., n)$
- $P(x_1) + P(x_2) + ... + P(x_n) = 1$

統計学用語 (3/3)

期待値 確率変数 X が $x_1, x_2, ..., x_n$ の各値をとる確率が $P_1, P_2, ..., P_n$ とすると，X の期待値 $E[X]$ は

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n$$

- サイコロを1回振って出る目の期待値

$$\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + ... + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$$

- 確率 0.7 で何ももらえず，確率 0.2 で 10 円もらえ，確率 0.1 で 100 円もらえるくじを 1 回引いた時のもらえる金額の期待値

$$0.7 \times 0 + 0.2 \times 10 + 0.1 \times 100 = 12$$