

一次式と Excel で問題解決 予習用教材

担当：大西 仁

<https://info.ouj.ac.jp/~maps17/>
<https://sites.google.com/site/ohlab2013/>

本資料は、放送大学の面接授業「一次式と Excel で問題解決」の予習のために、授業の第1回と第2回から抜粋したものです。「線形最適化問題とは何か」、「Excel で最適解を求める方法」、「どのように応用されるのか」を最小限示しています。本資料を読み、Excel で最適解を計算してから授業に臨むとよいでしょう。

オペレーションズ・リサーチ (OR)

- OR … Operations Research (米), Operational Research (英)
- 意思決定を数理的な手法で支援する方法の総称
 - 数理決定法, 決定支援, 意思決定科学, 最適化学
- 「作戦の研究」…元々軍事目的
 - 第二次世界大戦における軍事作戦の立案に端を発する
 - 防空のためのレーダーの配置
 - 部隊・物資の最適な派遣 (兵站)
 - 潜水艦に搭載する燃料 (哨戒) と魚雷 (攻撃) の量の最適量の決定
- 第二次世界大戦後, 政策決定や企業経営など幅広く利用
- 1940～1950年代にORの様々な手法が出現

ORの主な手法

- 数理最適化法
- 在庫管理
- スケジューリング
- ゲーム理論…必ずしも利害の一致しない複数の主体の意思決定
- 統計的決定理論…不確実状況下
- 待ち行列…混雑の数理
- etc

数理最適化法 (数理計画法)

決定変数 x_1, x_2, \dots, x_n … 問題解決者が値を決める変数

- 各製品の生産量, 各プロジェクトの採否, …

目的関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ … x_1, x_2, \dots, x_n に対する評価値

- 利益, コスト, …

制約条件 x_1, x_2, \dots, x_n が満たすべき条件

- 資源の制約, ノルマ, …

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots$$

数理最適化問題 制約を満たし, 目的関数を最適 (最大 or 最小) にする x_1, x_2, \dots, x_n の値を決める

- 資源の制約を満たしつつ利益を最大化, ノルマを果たしつつコストを最小化

数理最適化法

- 数理的な問題解決の基礎となる手法
 - 数理最適化法 = 数理最適化問題の解法
 - 数理最適化法 = 数理最適化問題 + 数理最適化問題の解法
 - … (問題解決全体)
- 線形最適化法
- 組み合わせ最適化法
 - 整数最適化法
 - その他
- 非線形最適化法
- ネットワーク最適化法
- etc

数理最適化法

線形最適化問題

x_1, x_2 が

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

を満たす時,

$$z = x_1 + 2x_2$$

の最大値, およびその時の
 x_1, x_2 を求めよ

最大化 $z = x_1 + 2x_2$

制約条件 $x_1 + 3x_2 \leq 24$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- 目的関数 (z), 制約条件がすべて一次式
- 決定変数 (x_1, x_2) は連続値

数理最適化法

組み合わせ最適化問題

最大化 $z = x_1 + 2x_2$

制約条件 $x_1 + 3x_2 \leq 24$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

$$x_1, x_2 = 0, 1, 2, \dots$$

- 決定変数 (x_1, x_2) は離散値
- 決定変数 (x_1, x_2) が整数値をとる線形最適化問題は整数最適化問題
- 本科目では線形最適化法と整数最適化法を扱う

非線形最適化問題

最大化 $z = x_1^2 + 2x_2$

制約条件 $x_1 + 3x_2 \leq 24$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- 目的関数 (z) , 制約条件のいずれかに非線形式

生産計画問題

- 2種類の製品P1とP2を生産
- P1は1 kgあたり1万円の利益の見込み
- P2は1 kgあたり2万円の利益の見込み
- 利益が最大になるようにP1とP2を生産したい
- ただし、生産にあたっては次の3つの制約を満たす必要

使用原料制約

- 製品P1を1 kg生産するのに1 kgの原料
- 製品P2を1 kg生産するのに3 kgの原料
- 1日あたりの最大使用可能量は24 kg

次に続く

生産計画問題 (続き)

労働時間制約

- 製品P1を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P2を1 kg生産するのにも4時間の労働時間
- 1日あたりの延べ労働時間は48時間以内

機械稼働時間制約

- 製品P1を1 kg生産するのに2時間の機械稼働時間
 - 製品P2を1 kg生産するのに1時間の機械稼働時間
 - 機械稼働時間は1日あたり22時間以内
-
- 1日あたりの利益見込みが最大になる, 製品P1とP2の1日あたりの生産量を決定せよ

生産計画問題の定式化

- 製品P1とP2をそれぞれ x_1, x_2 (kg)生産
- x_1, x_2 は決定変数
- P1は1 kgあたり1万円, P2は1 kgあたり2万円の利益見込み
- P1を x_1 (kg), P2を x_2 (kg)生産した時の利益見込み z (万円)は、

$$z = x_1 + 2x_2$$

- z は目的関数

生産計画問題の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに1 kgの原料
- 製品P2を1 kg生産するのに3 kgの原料
- P1を x_1 (kg), P2を x_2 (kg)生産するには $x_1 + 3x_2$ (kg)の原料が必要
- 1日あたりの最大使用可能量は24 kg
- 使用原料の制約は,

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

生産計画問題の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P2を1 kg生産するのに4時間の労働時間
- 製品P1を x_1 (kg), 製品P2を x_2 (kg) 生産するには $4x_1 + 4x_2$ (時間) の労働時間が必要
- 1日あたりの延べ労働時間は48時間以内
- 労働時間に関する制約は,

$$4x_1 + 4x_2 \leq 48$$

生産計画問題の定式化

- 製品P1を1 kg生産するのに2時間の機械稼働時間
- 製品P2を1 kg生産するのに1時間の機械稼働時間
- P1を x_1 (kg), 製品P2を x_2 (kg)生産するには
 $2x_1 + x_2$ (時間)の機械稼働時間が必要
- 機械稼働時間は22時間以内
- 機械稼働時間に関する制約は,

$$2x_1 + x_2 \leq 22$$

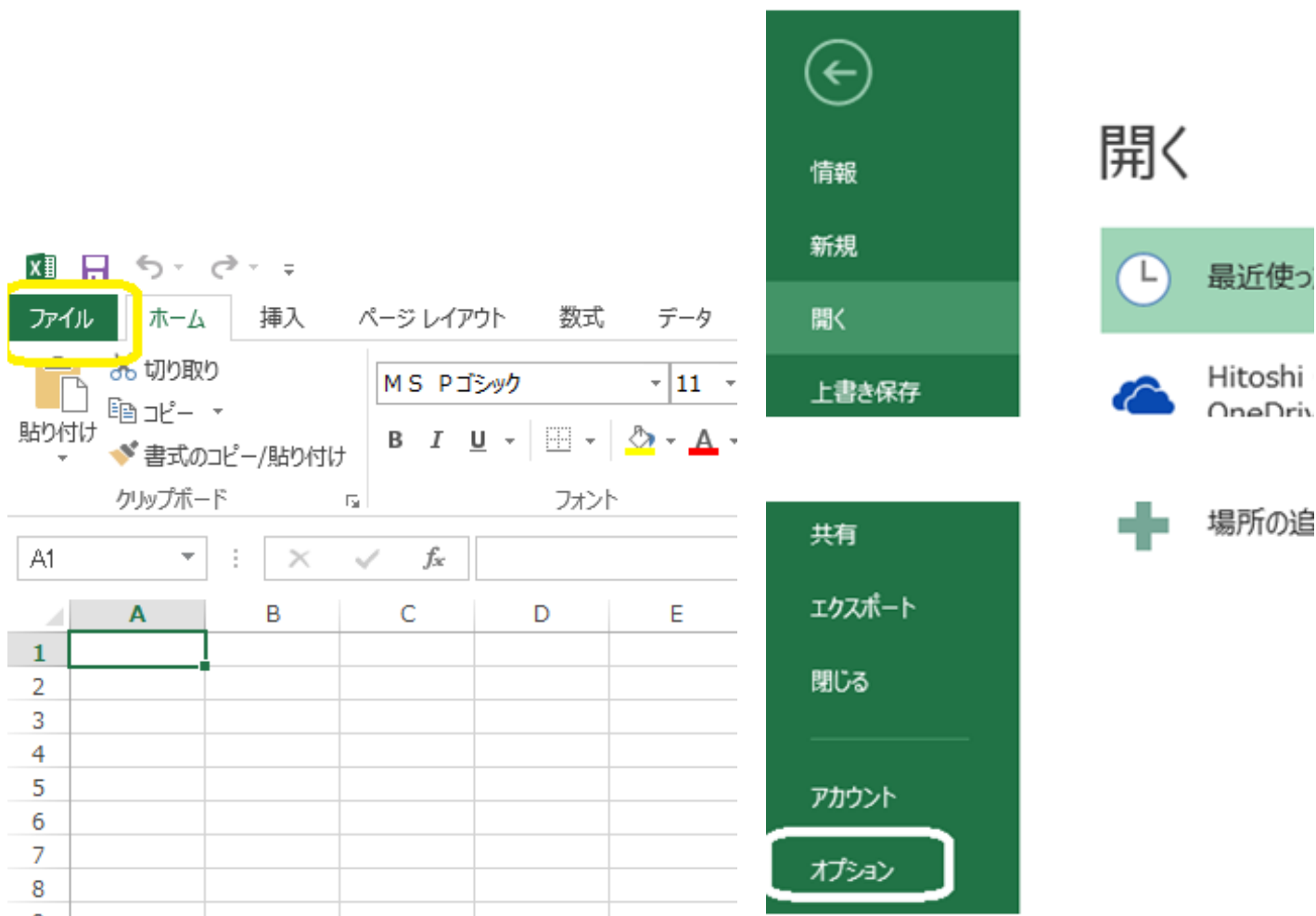
生産計画問題の定式化

最大化	$z = x_1 + 2x_2$	1日あたりの利益
制約条件	$x_1 + 3x_2 \leq 24$	使用原料制約
	$4x_1 + 4x_2 \leq 48$	労働時間制約
	$2x_1 + x_2 \leq 22$	機械稼働時間制約
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	非負条件

ソルバーアドインのインストール

- ソルバー アドインはExcel のアドインプログラムで，インストールすると利用可能になる

1. 「ファイル」 タブをクリックし，「オプション」 をクリックする



ソルバーアドインのインストール

2. ポップアップした「Excelのオプション」の「アドイン」をクリックする



Excel のオプション 最小化

基本設定

- 数式
- 文章校正
- 保存
- 言語
- 詳細設定
- リボンのユーザー設定
- クイック アクセス ツール バー
- アドイン**
- セキュリティ センター

Excel の基本オプションを設定します。

ユーザー インターフェイスのオプション

- 選択時にミニ ツール バーを表示する(M) ⓘ
- 選択時にクイック分析オプションを表示する(Q)
- リアルタイムのプレビュー表示機能を有効にする(L) ⓘ

ヒントのスタイル(R): ヒントに機能の説明を表示する

新しいブックの作成時

次を既定フォントとして使用(N): 本文のフォント

フォント サイズ(Z): 11

新しいシートの既定のビュー(V): 標準ビュー

ブックのシート数(S): 1

Microsoft Office のユーザー設定

ユーザー名(U): Hitoshi Ohnishi

Office へのサインイン状態にかかわらず、常にこれらの設定を使用する(A)

ソルバーアドインのインストール

3. 「管理」 ドロップダウンリスト（コンボボックス）で「Excel アドイン」を選択して「設定を」をクリックする

リボンのユーザー設定
クイック アクセス ツール バー
アドイン
セキュリティ センター

アクティブでないアプリケーション アドイン
Microsoft Actions Pane 3
Microsoft Power Map for Excel C:¥...er Map Excel ,
Microsoft Power Pivot for Excel C:¥...t Excel Add-ir
Microsoft Power View for Excel C:¥...w Excel Add-i
ユーロ通貨対応ツール C:¥...soft Office¥Of
中文轉換増益集 C:¥...soft Office¥Of
日付 (XML) C:¥... Files¥microsc
分析ツール C:¥...fice¥Office16¥
分析ツール - VBA C:¥...e¥Office16¥Li

ドキュメント関連アドイン
ドキュメント関連アドインはありません

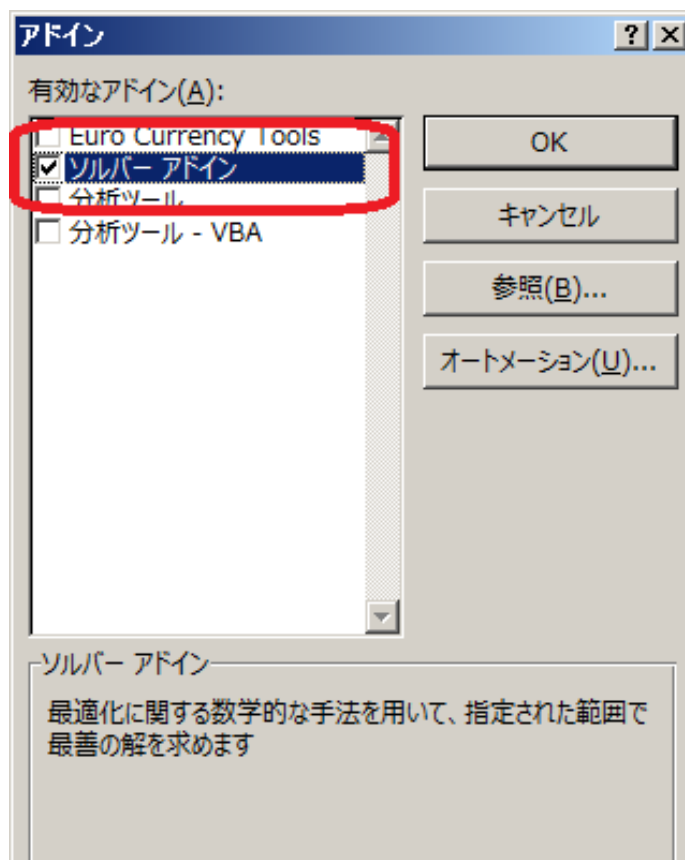
無効なアプリケーション アドイン

アドイン: Inquire
発行者: Microsoft Corporation
互換性: 互換性に関する情報はありません
場所: C:¥Program Files (x86)¥Microsoft Office¥Office16¥DCF¥NativeSt
説明: NativeShim Inquire Addins used by SpreadsheetIQ.

管理(A): Excel アドイン ▼ 設定(G)...

ソルバーアドインのインストール

4. 「有効なアドイン」 ボックスの一覧の 「ソルバー アドイン」 チェックボックスをオンにし, 「OK」 をクリックする
5. ソルバー アドインが現在コンピュータにインストールされていないというメッセージが表示されたら, 「はい」 をクリックする
6. ソルバー アドインを読み込むと, 「データ」 タブの 「分析」 で 「ソルバー」 コマンドを利用できるようになる



ソルバーアドインのインストール

- 実際にインストールしよう
- 学習センターでは，コンピュータを起動したら，そのたびにソルバーをインストールする必要がある
 - 自宅では，一度インストールするだけでよい
- 「データ」タブの「分析」で「ソルバー」コマンドが出ない場合は，Excelを一旦閉じて再度起動する
- 一部または全部入力済みのExcelテンプレートをダウンロードして，適宜利用すること

Excelで線形最適化法

ソルバーで線形最適化法

- まず,

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

を実際に入力して解いてみよう

Excelで線形最適化法

Excelのセル

- Excelはセルにデータを入力する
- セルは行(数字)と列(アルファベット)からなるアドレスにより特定される
- 例えば、図で枠で囲まれた「1」のアドレスは「B3」

	A	B	C
1		x1	x2
2	変数の値	0	0
3	目的関数の係数	1	2
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1
7			
8	目的関数	0	制約式の右辺の値

Excelで線形最適化法

決定変数をセルに割り当てる

- 線形最適化問題の決定変数 x_1, x_2 をセル B2 と C2 に割り当てる
- これらのセルには初期値として 0 を設定しておく
- セル B1 と C1 に表示している x_1 と x_2 は単なるラベルで、実際の変数の値はセル B2 と C2 に入る

	A	B	C
1		x1	x2
2	変数の値	0	0
3	目的関数の係数	1	2
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1
7			

Excelで線形最適化法

目的関数と制約式左辺の係数を入力

- 目的関数の決定変数 x_1, x_2 にかかる係数をセル B3 とセル C3 に入力する
- 同様に，制約式 (1)～(3) の 3本の不等式制約の左辺の係数を，各々セル B4 と C4， B5 と C5， B6 と C6 に入力する。

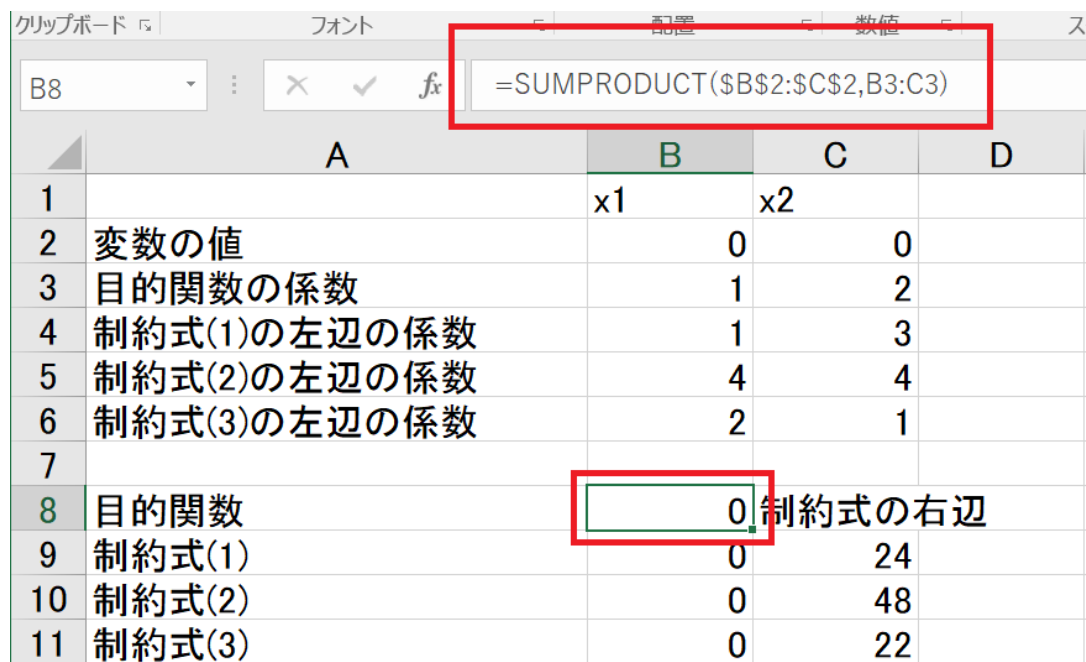
	A	B	C
1		x1	x2
2	変数の値	0	0
3	目的関数の係数	1	2
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1
7			

Excelで線形最適化法

目的関数の定義

- 目的関数を定義するために，B8セルに次の関数式を入力する
 $=\text{SUMPRODUCT}(\$B\$2:\$C\$2, B3:C3)$

SUMPRODUCT関数は，セルB2からC2とセルB3からC3の各要素の積和，すなわち $B2 \times B3 + C2 \times C3$ を計算することによって，目的関数 $x_1 + 2x_2$ を定義する． $x_1 = x_2 = 0$ なので，B8セルは0と表示される．



	A	B	C	D
1		x1	x2	
2	変数の値	0	0	
3	目的関数の係数	1	2	
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3	
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4	
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1	
7				
8	目的関数	0		制約式の右辺
9	制約式(1)	0	24	
10	制約式(2)	0	48	
11	制約式(3)	0	22	

Excelで線形最適化法

制約式左辺の定義

- \$B\$2のように\$記号がついていると「絶対アドレス」を表す
- B3のように\$記号がついていないと「相対アドレス」を表す
- このように定義しておくで、B8セルをコピーして、セルB9からB11までペーストすれば、制約式左辺の関数を適切に定義できる
- つまり、決定変数 x_1, x_2 の値は常にセルB2とC2に固定で、係数は目的関数や各制約式ごとに異なるようにコピーされる実際のセルB9からB11の内容は、

=SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B4:C4)

=SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B5:C5)

=SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B6:C6)

- SUMPRODUCT関数の第1引数として、B2:C2をマウスでドラッグして選択して、F4キーを押すと絶対アドレスになる

Excelで線形最適化法

制約式左辺の定義


- B8セルの右下隅をドラッグすることによっても、コピー&ペーストと同様の入力ができる

B9セル =SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B4:C4)

B10セル =SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B5:C5)

B11セル =SUMPRODUCT(\$B\$2:\$C\$2, B6:C6)

1		x1	x2	
2	変数の値		0	0
3	目的関数の係数		1	2
4	制約式(1)の左辺の係数		1	3
5	制約式(2)の左辺の係数		4	4
6	制約式(3)の左辺の係数		2	1
7				
8	目的関数		0	
9	制約式(1)		0	
10	制約式(2)		0	
11	制約式(3)		0	
12				

 ドラッグ

- 例えば、B9セルは $B2 \times B4 + C2 \times C4$ を計算していて、これは制約式(1)の左辺 $x_1 + 3x_2$ の計算に相当することを忘れてはいけない

Excelで線形最適化法

制約式右辺の入力

- セルC9からC11に制約式右辺の値を入力する

	A	B	C	D
1		x1	x2	
2	変数の値	0	0	
3	目的関数の係数	1	2	
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3	
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4	
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1	
7				
8	目的関数	0	制約式の右辺	
9	制約式(1)	0	24	
10	制約式(2)	0	48	
11	制約式(3)	0	22	
12				

- ここまでは下ごしらえで、ソルバーは次から登場する

Excelで線形最適化法

ソルバーの呼び出し

- 目的関数を定義したB8セルをクリック
- 「データ」タブ(ほぼ最上部中央)をクリックして,「ソルバー」(その下右部)をクリックすると,パラメータ設定画面が表示される

The screenshot shows the Excel interface with the 'Data' tab selected. The 'Solver' button in the 'Analysis' group is highlighted with a red box. The active cell is B8, containing the formula $=\text{SUMPRODUCT}(\$B\$2:\$C\$2,B3:C3)$. The spreadsheet data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2				
2	変数の値	0	0				
3	目的関数の係数	1	2				
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3				
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4				
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1				
7							
8	目的関数	0	0				
9	制約式(1)	0					
10	制約式(2)	0					
11	制約式(3)	0					
12							

Red text annotations on the image indicate: "B8セルをフォーカスしてから" (Focus on cell B8) and "ソルバーをクリック" (Click Solver).

Excelで線形最適化法

目的関数，決定変数のセルを指定，最大化か最小化かを指定

- 「目的セル」に目的関数を定義したアドレス B8 を指定する
- 最大化問題なので，最大値ボタンをチェックする
- 「変数セルの変更」には決定変数 x_1, x_2 (の値) のセルのアドレス \$B\$2:\$C\$2 を指定する

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) \$B\$8

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V) 0

変数セルの変更:(B) \$B\$2:\$C\$2

制約条件の対象:(U) \$B\$9:\$B\$11 <= \$C\$9:\$C\$11

追加(A)
変更(C)
削除(D)

Excelで線形最適化法

制約条件を設定

- 「制約条件の対象」のボックス右の「追加」ボタンをクリックする

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

制約のない変数を非負数にする(K)

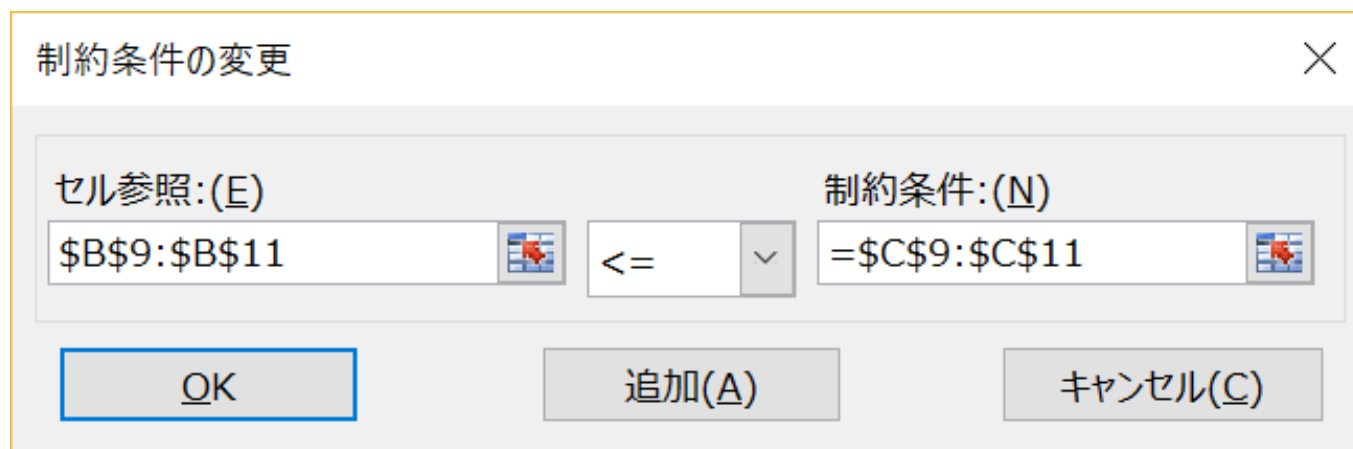
解決方法の選択:(E)

解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックスエンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションエンジンを選択してください。

Excelで線形最適化法

制約条件を設定

- ポップアップしたボックスの「セル参照」に3本の制約式左辺のセルのアドレスB9:B11を入れる
- 中央のドロップダウンリスト（コンボボックス）で不等号 \leq を選択する
- 「制約条件」に制約式右辺のセルのアドレスC9:C11を入れる
- 「セル参照」と「制約条件」はセルをドラッグすることで選択する
- 上記を設定したら「OK」ボタンを押す



Excelで線形最適化法

ソルバーの種類を選択と決定変数の非負条件の設定

- 「解決方法の選択」は線形最適化問題なので「シンプレックスLP」を選択する
- 変数の非負条件は「制約のない変数を非負数にする」をチェックする
- 「解決」ボタンを押すことにより最適解の計算が行われる

制約条件の対象:(U)
\$B\$9:\$B\$11 <= \$C\$9:\$C\$11

追加(A)
変更(C)
削除(D)
すべてリセット(R)
読み込み/保存(L)
オプション(P)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:
(E) シンプレックス LP

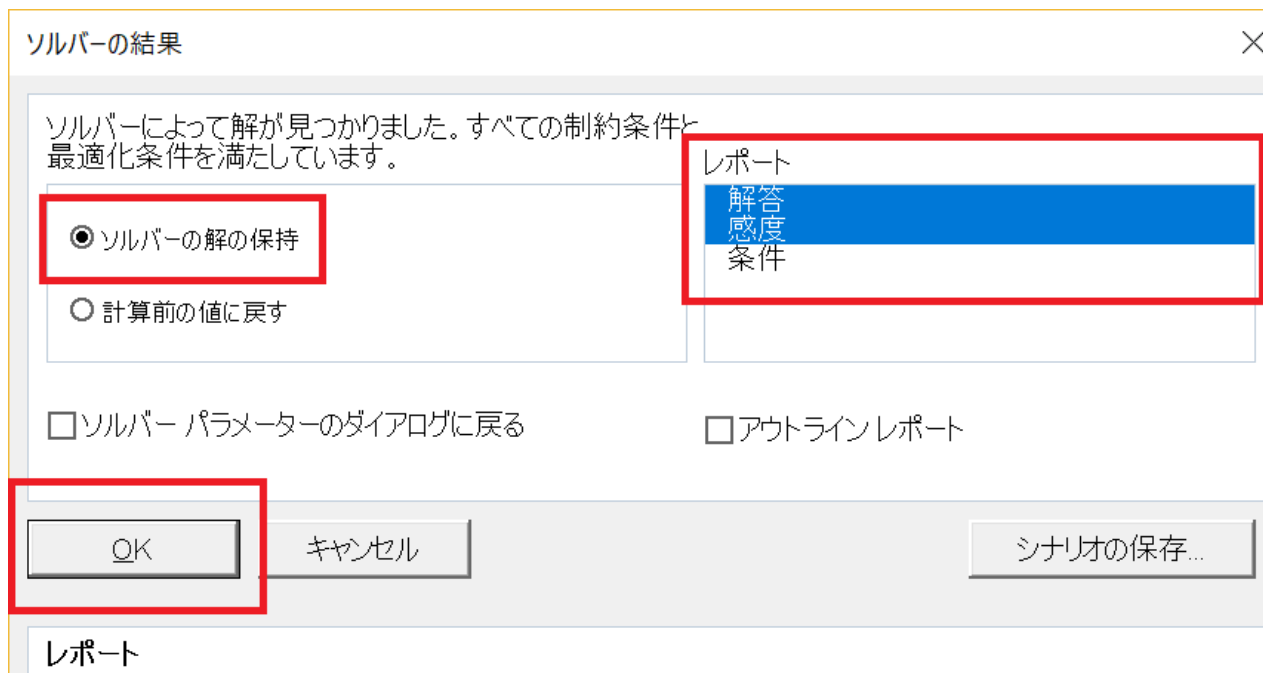
解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックスエンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(O)

Excelで線形最適化法

計算結果の扱いの選択

- 「ソルバーによって解が見つかりました。すべての制約条件と最適化条件を満たしています。」という表示が出たら、「ソルバーの解を保持」を選択する
- 「レポート」は必要に応じて選択する … レポートの読み方は後で説明



Excelで線形最適化法

計算結果の読み方

- セルB2およびC2の値がどちらも6になった
→ $x_1 = 6, x_2 = 6$ のときに目的関数は最大になる
- B8セルの値が18になった
→ 目的関数の最大値は18 ($x_1 + 2x_2$)
- 制約式左辺の値も出た

	A	B	C	D
1		x1	x2	
2	変数の値	6	6	
3	目的関数の係数	1	2	
4	制約式(1)の左辺の係数	1	3	
5	制約式(2)の左辺の係数	4	4	
6	制約式(3)の左辺の係数	2	1	
7				
8	目的関数	18	制約式の右辺	
9	制約式(1)	24	24	
10	制約式(2)	48	48	
11	制約式(3)	18	22	
12				

参考文献

数理最適化法

- 坂和 正敏・矢野 均・西崎 一郎 (2010) 「わかりやすい数理計画法」, 森北出版
シンプレックス法について丁寧に解説している。Microsoft Office Excel のソルバーを用いて線形最適化問題を解く手続きも示されている。
- 福島雅夫 (2011) 「新版数理計画入門」, 朝倉書店
数理最適化の理論, アルゴリズム…数学が得意な人向き
- 今野 浩 (2011) 「役に立つ一次式 デジタル複製版—整数計画法「気まぐれな王女」の50年」, 日本評論社
数理最適化法発展の裏話。高校まで数学が得意で, 大学で挫折した人は大いに共感できる。楽しい本であるが, 難しい数理最適化法のアルゴリズムのイメージができたり, 役に立つ本でもある。

参考文献

OR

- 松井泰子・根本俊男・宇野毅明 (2008) 「入門オペレーションズ・リサーチ」, 東海大学出版会
オペレーションズ・リサーチの技法による問題解決を身近な例を用いて紹介している. 具体的な解法についてはあまり書かれていない.
- 今野浩・後藤順哉 (2011) 「意思決定のための数理モデル入門」, 朝倉書店
第一著者による「数理決定法入門—キャンパスのOR」のリニューアル版. 旧版を読んでORに興味を持った.
- 藤澤克樹・後藤順哉・安井雄一郎 (2011) 「Excelで学ぶOR」, オーム社
理論と演習がバランス良く配置されており, 説明も分かりやすい.
- 大野 勝久・中出 康一・逆瀬川 浩孝 (2014) 「Excelで学ぶ オペレーションズリサーチ」, 近代科学社.