イプシロン・デルタに強くなりたい人のために

解析学の極限についてのきちんとした議論において必要になる $\varepsilon-\delta$ 論法および $\epsilon-N$ 論法を演習問題を解くことを通して修得することを目的とする。ε に対して δ や N を定めるときに、さまざまなことを考慮することが必要になる。そうした思考に慣れるために、まずは示された解答を見て理解し、ついで、示された解答を見ないで自ら解答をつくりだすという勉強法を勧める。δ や N は正数でなければならないことに注意が必要であるが、一通りではないので、できれば示された解答とは別の解答をつくりだすことが期待される。

1 Step 1 デルタの取り方（１）

1-1 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-2|<\delta$ ならば、$|x^2-4|<\varepsilon$

1-2 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-3|<\delta$ ならば、$|x^2-9|<\varepsilon$

1-3 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x+2|<\delta$ ならば、$|x^2-4|<\varepsilon$

1-4 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-1|<\delta$ ならば、$|x^3-1|<\varepsilon$

1.1 Step 2 デルタの取り方（２）

2-1 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x+1|<\delta$ ならば、$|x^3+1|<\varepsilon$

2-2 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-1|<\delta$ ならば、$|\frac{1}{x}-1|<\varepsilon$

2-3 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x+2|<\delta$ ならば、$|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}|<\varepsilon$

2-4 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-1|<\delta$ ならば、$|\sqrt{x}-1|<\varepsilon$

2-5 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-2|<\delta$ ならば、$|\sqrt{x}-\sqrt{2}|<\varepsilon$

2-6 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-1|<\delta$ ならば、$|\frac{1}{x^2}-1|<\varepsilon$

2-7 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。

$|x-1|<\delta$ ならば、$|x\sqrt{x}-1|<\varepsilon$

1.2 Step 3 デルタの取り方（３）

3-1 a を実数とし、$\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-a|<\delta$ ならば、$|x^2-a^2|<\varepsilon$

3-2 $a>0$ とし、$\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-a|<\delta$ ならば、$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$

3-3 $a\neq 0$ とし、$\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-a|<\delta$ ならば、$|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\varepsilon$

3-4 a を実数とし、$\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす $\delta>0$ を求めよ。
$|x-a|<\delta$ ならば、$|x^3-a^3|<\varepsilon$

1.3 Step 4 $\varepsilon.\delta$ 論法による関数の極限値

関数 $f(x)$ について、$\lim_{x\to a} f(x)=A$、つまり、x が a に近づくとき、$f(x)$ が限りなく A に近づくとは、任意の正数 ϵ に対して、
$0<|x-a|<\delta$ をみたす x について、$|f(x)-A|<\varepsilon$ となるような正数 δ が存在することである。
これを $\varepsilon-\delta$ 論法による関数の極限値の定義という。4-1 $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ を示せ。

4-2 $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x-2}=12$ を示せ。

4-3 $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$ を示せ。

4-4 $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{4}$ を示せ。

4-5 $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=3a^2$ を示せ。

1.4 Step 5 エヌの取り方

5-1 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。
$n\geqq N$ をみたす自然数 n について、$\frac{1}{n}<\varepsilon$

5-2 $\varepsilon>0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。
$n\geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\frac{n^2+1}{n^2}-1|<\varepsilon$

5-3　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\frac{2\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1} - 2| < \varepsilon$

5-4　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\frac{3n}{n-2} - 3| < \varepsilon$

5-5　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\frac{n^2}{n^2-n-2} - 1| < \varepsilon$

5-6　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\frac{3n^2+1}{2n^2-1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$

1.5 Step 6　$\varepsilon - N$ 論法による数列の極限値

数列 a_n について、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$、つまり、$n$ が大きくなるとき、a_n が限りなく a に近づくとは、
任意の正数 ε に対して、
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \varepsilon$ となるような自然数 N が存在することである。
これを、$\varepsilon - N$ 論法による数列の極限値の定義という。

6-1　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = 2$ を示せ。

6-2　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2-1} = 0$ を示せ。

6-3　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n-2} = 0$ を示せ。

6-4 $\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+2}{n^2-n} = 3$ を示せ。

6-5　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}+1} = 1$ を示せ。

6-6　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ がなりたつとき、$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$ がなりたつことを $\varepsilon - N$ 論法を用いて示せ。

1.6 Step 7　関数の極限値の性質

7-1　$\lim_{x\to a} f(x) = A$ と $\lim_{x\to a} g(x) = B$ が成り立つとき、$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$ が成り立つことを示せ。

7-2　$\lim_{x\to a} f(x) = A$ と $\lim_{x\to a} g(x) = B$ が成り立つとき、$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

が成り立つことを示せ。

7-3　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ で $A \neq 0$ が成り立つとき、$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$ が成り立つことを示せ。

7-4　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ と $A > 0$　が成り立つとき、$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ が成り立つことを示せ。

1.7 Step 8　数列の極限値の性質

8-1　$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ と $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ が成り立つとき、$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$ が成り立つことを示せ。

8-2　$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ と $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ が成り立つとき、$\lim_{n \to \infty} a_n b_n = ab$ が成り立つことを示せ。

8-3　$\lim_{n \to \infty} a_n = a$　で　$a \neq 0$ が成り立つとき　$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ が成り立つことを示せ。

8-4　$\lim_{n \to \infty} a_n = a$　で　$a > 0$ が成り立つとき　$\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ が成り立つことを示せ。

1.8 Step 9　関数の極限値と数列の極限値の関係

9-1　次の（１）がなりたてば、（２）がなりたつことを示せ。

（１）　$\lim_{x \to a} f(x) = A$

（２）　$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ と、$a_n \neq a (n = 1, 2, \cdots)$ をみたす任意の数列 a_n について、

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$

9-2　上の（１）が成り立たなければ、（２）が成り立たないことを示せ。

2　解答

1-1　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x-2| < \delta$ ならば、$|x^2-4| < \varepsilon$

解　　不等式
$$|x^2-4| = |x-2||x+2| = |x-2||x-2+4| \le |x-2|(|x-2|+4)$$
を考慮して、$\delta > 0$ をどのようにとるかを考える。
$\delta = \dfrac{\varepsilon}{5} \wedge 1$ とおく。ここで、$\wedge$ は 2 つの数のうちの小さい方を意味する記号である。
$\dfrac{\varepsilon}{5}$ と 1 はどちらも正数だから、$\delta > 0$ となる。この $\delta > 0$ に対して、
$|x-2| < \delta$ をみたす x について、$|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ と $|x-2| < 1$ がなりたつので、
$$|x^2-4| \leqq |x-2|(|x-2|+4) < \frac{\varepsilon}{5} \times (1+4) = \varepsilon$$

別解 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4} \wedge 1$ とおく。
$|x-2| < \delta$ をみたす x について、　$|x-2| < 1$ だから、$1 < x < 3$ となり、
$|x+2| < 5$
したがって、$|x^2-4| = |x-2||x+2| < \dfrac{\varepsilon}{5} \times 5 = \varepsilon$

このよに $\delta > 0$ のとりかたはたくさんあり、そのうちの一つを与えればよい。

1-2　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x-3| < \delta$ ならば、$|x^2-9| < \varepsilon$

解　　$\delta = \dfrac{\varepsilon}{7} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
この $\delta > 0$ に対して、
$|x-3| < \delta$ をみたす x について、
$$|x^2-9| \leqq |x-3|(|x-3|+6) < \frac{\varepsilon}{7} \times (1+6) = \varepsilon$$

1-3　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x+2| < \delta$ ならば、$|x^2-4| < \varepsilon$

解　　$\delta = \dfrac{\varepsilon}{5} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
この $\delta > 0$ に対して、
$|x+2| < \delta$ をみたす x について、

$$|x^2-4| \leq |x+2||x+2-4| \leq |x+2|(|x+2|+4) < \frac{\varepsilon}{5} \times (1+4) = \varepsilon$$

1-4 $\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x-1| < \delta$ ならば、$|x^3-1| < \varepsilon$

解 $\delta = \frac{\varepsilon}{7} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
この $\delta > 0$ に対して、
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、$|x-1| < 1,$ だから、$0 < x < 2$ となり、$|x| < 2$ だから、

$$|x^3-1| \leqq |x-1||x^2+x+1| \leqq |x-1|(|x|^2+|x|+1) < \frac{\varepsilon}{7} \times (2^2+2+1) = \varepsilon$$

2.1 解答

2-1 $\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x+1| < \delta$ ならば、$|x^3+1| < \varepsilon$

解 $\delta = \frac{\varepsilon}{7} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
この $\delta > 0$ に対して、
$|x+1| < \delta$ をみたす x について、$|x+1| < 1,$ だから、$-2 < x < 0$ となり、$|x| < 2$ だから、

$$|x^3+1| = |x+1||x^2-x+1| \leqq |x+1|(|x|^2+|x|+1) < \frac{\varepsilon}{7} \times (2^2+2+1) = \varepsilon$$

2-2 $\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x-1| < \delta$ ならば、$|\frac{1}{x}-1| < \varepsilon$

解
$1 = |1-x+x| \leqq |1-x| + |x|$ より、$|x| \geqq 1 - |x-1|$
後の不等式を用いる。
$\delta = \frac{\varepsilon}{2} \wedge \frac{1}{2}$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、

$$|\frac{1}{x}-1| = \frac{|1-x|}{|x|} \leqq \frac{|x-1|}{1-|x-1|} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

2-3　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$$|x+2| < \delta \text{ ならば、} |\frac{1}{x} + \frac{1}{2}| < \varepsilon$$

解
$2 = |2 + x - x| \leqq |2 + x| + |x|$ より、$|x| \geqq 2 - |x+2|$
後の不等式を用いる。
$\delta = 2\varepsilon \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x+2| < \delta$ をみたす x について、

$$|\frac{1}{x} + \frac{1}{2}| = \frac{|2+x|}{2|x|} \leqq \frac{|x+2|}{2(2-|x+2|)} < \frac{2\varepsilon}{2(2-1)} = \varepsilon$$

2-4　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$$|x-1| < \delta \text{ ならば、} |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$$

解 $\delta = \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、

$$|\sqrt{x} - 1| = |\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}| \leqq \frac{|x-1|}{1} < \varepsilon$$

2-5　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$$|x-2| < \delta \text{ ならば、} |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \varepsilon$$

解 $\delta = \sqrt{2}\varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、

$$|\sqrt{x} - \sqrt{2}| = |\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}| \leqq \frac{|x-2|}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

2-6　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$$|x-1| < \delta \text{ ならば、} |\frac{1}{x^2} - 1| < \varepsilon$$

解 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{10} \wedge \dfrac{1}{2}$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、

$$|\frac{1}{x^2} - 1| = \frac{|1-x||1+x|}{|x^2|} \leqq \frac{|x-1|(|x+1|+2)}{(1-|x-1|)^2} < \frac{\frac{\varepsilon}{10}(\frac{1}{2}+2)}{(1-\frac{1}{2})^2} = \varepsilon$$

2-7 $\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$|x-1| < \delta$ ならば、$|x\sqrt{x}-1| < \varepsilon$

解 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-1| < \delta$ をみたす x について、$|x-1| < 1$ より、$0 < x < 2$
だから、$|x| < 2$。したがって、

$$|x\sqrt{x}-1| = \frac{|x\sqrt{x}-1||x\sqrt{x}+1|}{x\sqrt{x}+1} < \frac{|x^3-1|}{1}$$

$\leqq |x-1|(|x|^2+|x|+1) < \dfrac{\varepsilon}{7}(2^2+2+1) = \varepsilon$

2.2 解答

3-1 a を実数とし、$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$|x-a| < \delta$ ならば、$|x^2-a^2| < \varepsilon$

解 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1} \wedge 1$ とおくと（$a = 0$ のとき分母が 0 とならないように $+1$ した）
、$\delta > 0$ となる。
$|x-a| < \delta$ をみたす x について、
$|x^2-a^2| = |x-a||x+a| \leqq |x-a|(|x-a|+2|a|) < \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1} \times (1+2|a|) = \varepsilon$

3-2 $a > 0$ とし、$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$|x-a| < \delta$ ならば、$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon$

解 $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-a| < \delta$ をみたす x について、
$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

3-3 $a \neq 0$ とし、$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。

$|x-a| < \delta$ ならば、$|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}| < \varepsilon$

解 $\delta = \dfrac{|a|^2\varepsilon}{2} \wedge \dfrac{|a|}{2}$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-a| < \delta$ をみたす x について、
$|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}| = \dfrac{|a-x|}{|x||a|} \leqq \dfrac{|x-a|}{|a|(|a|-|x-a|)} < \dfrac{\frac{|a|^2\varepsilon}{2}}{|a|(|a|-\frac{|a|}{2})} = \varepsilon$

3-4　　a を実数とし、$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす $\delta > 0$ を求めよ。
$|x-a| < \delta$ ならば、$|x^3 - a^3| < \varepsilon$

解 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3|a|^2 + 3|a| + 1} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$|x-a| < \delta$ をみたす x について、
$|x| \leqq |x-a| + |a| < 1 + |a|$ だから、
$$|x^3 - a^3| = |x-a||x^2 + ax + a^2| \leqq |x-a|(|x|^2 + |a||x| + |a|^2)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3|a|^2 + 3|a| + 1}((|a|+1)^2 + |a|(|a|+1) + |a|^2) = \varepsilon$$

2.3　解答

関数 $f(x)$ について、$\lim_{x\to a} f(x) = A$、つまり、x が a に近づくとき、$f(x)$ が限りなく A に近づくとは、
任意の正数 ϵ に対して、
$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、$|f(x) - A| < \varepsilon$
となるような正数 δ が存在することである。
これを $\varepsilon - \delta$ 論法による関数の極限値の定義という。

4-1　　$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$ に対して、δ=ϵ とおくと、$\delta > 0$ であり、
$0 < |x-1| < \delta$ をみたす x について、
$|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \varepsilon$
がなりたつから、$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$。

4-2　$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x-2}=12$ を示せ。

解　$\varepsilon>0$ に対して、$\delta{=}\frac{\varepsilon}{7}\wedge 1$ とおくと、$\delta>0$ であり、
$0<|x-2|<\delta$ をみたす x について、
$|\frac{x^2-8}{x-2}-12|=|(x^2+2x+4)-12|=|x^2+2x-8|$
$=|x-2||x+4|\leqq|x-2|(|x-2|+6)<\frac{\varepsilon}{7}(1+6)<\varepsilon$
がなりたつから、$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x-2}=12$。

4-3　$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$ を示せ。

解　$\varepsilon>0$ に対して、$\delta{=}2\varepsilon$ とおくと、$\delta>0$ であり、
$0<|x-1|<\delta$ をみたす x について、
$|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}|=|\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{1}{2}|=|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}|$
$=|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}|=|\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(1+\sqrt{x})^2}|\leqq\frac{|x-1|}{2\times 1^2}<\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon$
がなりたつから、$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$。

4-4　$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{4}$ を示せ。

解　$\varepsilon>0$ に対して、$\delta{=}4\varepsilon\wedge 1$ とおくと、$\delta>0$ であり、
$0<|x-2|<\delta$ をみたす x について、
$|\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{1}{4}|=|\frac{2-x}{2x(x-2)}+\frac{1}{4}|=|\frac{-2+x}{4x}|$
$\leqq\frac{|x-2|}{4(2-|x-2|)}<\frac{4\varepsilon}{4(2-1)}=\varepsilon$
がなりたつからて、$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{4}$。

4-5　　$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて $\lim_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$ に対して、δ=$\dfrac{\varepsilon}{1 + 3|a|} \wedge 1$ とおくと、$\delta > 0$ であり、
$0 < |x - 1| < \delta$ をみたす x について、
$|\dfrac{x^3 - a^3}{x - a} - 3a^2| = |(x^2 + ax + a^2) - 3a^2| = |x^2 + ax - 2a^2|$
$= |x - a||x + 2a| \leqq |x - a|(|x - a| + 3|a|)$
$< \dfrac{\varepsilon}{1 + 3|a|} \times (1 + 3|a|) = \varepsilon$
がなりたつから、$\lim_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$。

2.4　解答

実数 x に対して、$[x]$ は x を超えない最大の自然数を表す。例えば、$[2.5] = 2, [9.8] = 9$ などとなる。
したがって、$N = [x] + 1$ とおくと、N は自然数であり、$x < N$ がなりたつ。

5-1　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$$n \geqq N \text{ をみたす自然数 } n \text{ について、} \frac{1}{n} < \varepsilon$$

解　　$N = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$ とおくと、N は自然数であり、
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ だから、

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

5-2　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$$n \geqq N \text{ をみたす自然数 } n \text{ について、} |\frac{n^2 + 1}{n^2} - 1| < \varepsilon$$

解　　$N = [\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}] + 1$ とおくと、N は自然数であり、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ だから、$|\dfrac{n^2+1}{n^2} - 1| = \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \varepsilon$

5-3　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\dfrac{2\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1} - 2| < \varepsilon$

解　　$N = [\dfrac{25}{\varepsilon^2}] + 1$ とおくと、N は自然数であり、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \dfrac{25}{\varepsilon^2}$ だから、

$$|\frac{2\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1} - 2| = \frac{5}{\sqrt{n}+1} < \frac{5}{\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

5-4　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\dfrac{3n}{n-2} - 3| < \varepsilon$

解　　$N = [\dfrac{6}{\varepsilon}] + 3$ とおくと、N は自然数であり、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \dfrac{6}{\varepsilon} + 2$ だから、

$$|\frac{3n}{n-2} - 3| = \frac{6}{n-2} < \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon} + 2 - 2} = \varepsilon$$

5-5　　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|\dfrac{n^2}{n^2-n-2} - 1| < \varepsilon$

解　　$N = [\dfrac{2}{\varepsilon}] + 3$ とおくと、N は自然数であり、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \dfrac{2}{\varepsilon} + 2$ だから、

$$|\frac{n^2}{n^2-n-2} - 1| = \frac{n+2}{n^2-n-2} = \frac{1+\frac{2}{n}}{n-1-\frac{2}{n}} < \frac{1+\frac{2}{2}}{(\frac{2}{\varepsilon}+2)-1-\frac{2}{2}} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

5-6　$\varepsilon > 0$ とするとき、次をみたす自然数 N を求めよ。

$$n \geqq N \text{ をみたす自然数 } n \text{ について、} |\frac{3n^2+1}{2n^2-1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$$

解　$N = [\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\varepsilon}}] + 2$ とおくと、N は自然数であり、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\varepsilon}} + 1$ だから、

$$|\frac{3n^2+1}{2n^2-1} - \frac{3}{2}| = \frac{5}{2(2n^2-1)} < \frac{5}{4(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\varepsilon}}+1)^2 - 2} = \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon} + \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\varepsilon}} + 2} < \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

2.5　解答

数列 a_n について、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$、つまり、$n$ が大きくなるとき、a_n が限りなく a に近づくとは、
任意の正数 ε に対して、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \varepsilon$

となるような自然数 N が存在することである。
これを、$\varepsilon - N$ 論法による数列の極限値の定義という。

6-1　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = 2$ を示せ。

解　$\varepsilon > 0$　とする。
$N = [\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}}] + 1$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}}$ がなりたつから、.

$$|\frac{2n^2-1}{n^2+1} - 2| = \frac{3}{n^2+1} < \frac{3}{n^2} < \frac{3}{(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \varepsilon$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = 2$　が示せた。

6-2　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2-1} = 0$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$　とする。
$N = [\frac{3}{\varepsilon}] + 2$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \frac{3}{\varepsilon} + 1$ がなりたつから、.

$$|\frac{3n}{n^2-1} - 0| = \frac{3}{n - \frac{1}{n}} < \frac{3}{n-1} < \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon} + 1 - 1} = \varepsilon$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2-1} = 0$　が示せた。

6-3　　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n-2} = 0$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$　とする。
$N = [(\frac{2}{\varepsilon} + 2)^2] + 1$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > (\frac{2}{\varepsilon} + 2)^2$ がなりたつから、.

$$|\frac{\sqrt{n}+1}{n-2} - 0| = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{1}}} < \frac{2}{\sqrt{(\frac{2}{\varepsilon} + 2)^2} - 2} = \varepsilon$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n-2} = 2$　が示せた。

6-4 $\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+2}{n^2-n} = 3$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$　とする。
$N = [\frac{6}{\varepsilon}] + 2$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > \frac{6}{\varepsilon} + 1$ がなりたつから、.

$$|\frac{3n^2+2n+2}{n^2-n} - 3| = \frac{5n+2}{n^2-n} < \frac{5 + \frac{2}{n}}{n-1} < \frac{5 + \frac{2}{2}}{n-1} < \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon} + 1 - 1} = \varepsilon$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+2}{n^2-n} = 3$　が示せた。

6-5　$\varepsilon - N$ 論法を用いて、$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}+1} = 1$ を示せ。

解　　$\varepsilon > 0$　とする。
$N = [(\frac{2}{\varepsilon} + 1)^2] + 1$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n > (\frac{2}{\varepsilon} + 1)^2$ がなりたつから、.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}+1} - 1\right| &= \frac{2\sqrt{n}-1}{n-\sqrt{n}+1} < \frac{2\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \\
&< \frac{2}{\sqrt{n}-1} < \frac{2}{\sqrt{(\frac{2}{\varepsilon}+1)^2} - 1} = \varepsilon
\end{aligned}$$

したがって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}+1} = 1$　が示せた。

6-6　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ がなりたつとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$ がなりたつことを $\varepsilon - N$ 論法を用いて示せ。

解　　$\varepsilon > 0$　とする。$\frac{\varepsilon}{2} > 0$　だから、条件　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、
$n \geqq M$ をみたす自然数 n について、$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
となる自然数 M が存在する。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_M}{n} = 0$　がなりたつから、
　　$n \geqq N$　をみたす自然数 n について、$\dfrac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_M|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$
となる M よりも大きな自然数 N が存在する。
$n \geqq N$　をみたす自然数 n について、

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - 0\right| \leqq \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_M|}{n} + \frac{|a_{M+1}| + |a_{M+2}| + \cdots + |a_n|}{n}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2}}{n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{(n-M)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

したがって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$　がなりたつ。

2.6 解答

7-1 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ と $\lim_{x\to a} g(x) = B$ が成り立つとき、$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$ が成り立つことを示せ。

解 $\varepsilon > 0$ とする。$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから、条件 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ より、

$0 < |x-a| < \delta_1$ をみたす x について、$|f(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

となる正数 δ_1 が存在する。
同様に、条件 $\lim_{x\to a} g(x) = B$ より、

$0 < |x-a| < \delta_2$ をみたす x について、$|g(x)-B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

となる正数 δ_2 が存在する。
$\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、$0 < |x-a| < \delta_1$ と $0 < |x-a| < \delta_2$ をみたすから、
$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| \leqq |f(x)-A| + |g(x)-B| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
となり、結論、$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$ がなりたつ。

7-2 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ と $\lim_{x\to a} g(x) = B$ が成り立つとき、$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$ が成り立つことを示せ。

解 $\varepsilon > 0$ とする。$\dfrac{\varepsilon}{2(1+|B|)} > 0$ だから、条件 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ より、

$0 < |x-a| < \delta_1$ をみたす x について、$|f(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$

となる正数 δ_1 が存在する。
$\dfrac{\varepsilon}{2(1+|A|)} \wedge 1 > 0$ だから、条件 $\lim_{x\to a} g(x) = B$ より、

$0 < |x-a| < \delta_2$ をみたす x について、$|g(x)-B| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|A|)} \wedge 1$

となる正数 δ_2 が存在する。
$\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ とおくと、$\delta > 0$ となる。
$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、$0 < |x-a| < \delta_1$ と $0 < |x-a| < \delta_2$ をみたすから、
$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB|$
$\leqq |g(x)||f(x)-A| + |A||g(x)-B|$
$\leqq (|g(x)-B| + |B|)|f(x)-A| + |A||g(x)-B|$

$$< (1+|B|)\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} + |A|\frac{\varepsilon}{2(1+|A|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
となり、結論、$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$ がなりたつ。

7-3　　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ で $A \neq 0$ が成り立つとき、$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$ が成り立つことを示せ。

解　　$\varepsilon > 0$ とする。$\frac{|A|^2\varepsilon}{2} \wedge \frac{|A|}{2} > 0$ だから、条件　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ より、

$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、$|f(x) - A| < \frac{|A|^2\varepsilon}{2} \wedge \frac{|A|}{2}$

となる正数 δ が存在する。
$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、
$|f(x) - A| < \frac{|A|^2\varepsilon}{2}$ と $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ をみたすから、

$$|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}| = \frac{|A - f(x)|}{|A||f(x)|} \leqq \frac{|f(x) - A|}{|A|(|A| - |f(x) - A|)} < \frac{\frac{|A|^2\varepsilon}{2}}{|A|(|A| - \frac{|A|}{2})} = \varepsilon$$

となり、結論、$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$ がなりたつ。

7-4　　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ と $A > 0$　が成り立つとき、$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ が成り立つことを示せ。

解　　$\varepsilon > 0$ とする。$\sqrt{A}\varepsilon > 0$ だから、条件　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ より、

$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、$|f(x) - A| < \sqrt{A}\varepsilon$

となる正数 δ が存在する。
$0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について、

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{A}| = \frac{|\sqrt{f(x)} - \sqrt{A}||\sqrt{f(x)} + \sqrt{A}|}{|\sqrt{f(x)} + \sqrt{A}|} < \frac{|f(x) - A|}{0 + \sqrt{A}} < \frac{\sqrt{A}\varepsilon}{\sqrt{A}} = \varepsilon$$

となり、結論、$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ がなりたつ。

2.7 解答

8-1 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ が成り立つとき、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ が成り立つことを示せ。

解 $\varepsilon > 0$ とする。$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから、条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、

$n \geqq N_1$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

となる自然数 N_1 が存在する。
同様に、条件 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ より、

$n \geqq N_2$ をみたす自然数 n について、$|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

となる自然数 N_2 が存在する。
$N = N_1 \vee N_2$ とおく（$N_1 \vee N_2$ は N_1 と N_2 の大きい方の数を意味する）。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n \geqq N_1$ と $n \geqq N_2$ をみたすから、
$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqq |a_n - a| + |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
となり、結論、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ がなりたつ。

8-2 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ が成り立つとき、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ が成り立つことを示せ。

解 $\varepsilon > 0$ とする。$\dfrac{\varepsilon}{2(1+|b|)} > 0$ だから、条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、

$n \geqq N_1$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$

となる自然数 N_1 が存在する。（注、分母を $1+|b|$ としたのは $b = 0$ のときを考慮したためである）
$\dfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \wedge 1 > 0$ だから、条件 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ より、

$n \geqq N_2$ をみたす自然数 n について、$|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \wedge 1$

となる自然数 N_2 が存在する。
$N = N_1 \vee N_2$ とおく。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$n \geqq N_1$ と $n \geqq N_2$ をみたすから、
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leqq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$
$\leqq (|b_n - b| + |b|)|a_n - a| + |a||b_n - b|$
$< (1+|b|) \times \dfrac{\varepsilon}{2(1+|b|)} + |a| \times \dfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$

$< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
となり、結論、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ がなりたつ。

8-3　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$　で　$a \neq 0$ が成り立つとき　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$ が成り立つことを示せ。

解　$\varepsilon > 0$ とする。$\dfrac{|a|^2\varepsilon}{2} \wedge \dfrac{|a|}{2} > 0$ だから、条件　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、
　$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \dfrac{|a|^2\varepsilon}{2} \wedge \dfrac{|a|}{2}$
となる自然数 N が存在する。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、
$|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a}| = \dfrac{|a - a_n|}{|a||a_n|} \leqq \dfrac{|a_n - a|}{|a|(|a| - |a_n - a|)} < \dfrac{\frac{|a|^2\varepsilon}{2}}{|a|(|a| - \frac{|a|}{2})} = \varepsilon$
となり、結論、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$ がなりたつ

8-4　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$　で　$a > 0$ が成り立つとき　$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ が成り立つことを示せ。 解　$\varepsilon > 0$ とする。$\sqrt{a}\varepsilon > 0$ だから、条件　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

より、
　$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$
となる自然数 N が存在する。
$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、
$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \dfrac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}||\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$
となり、結論、$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ がなりたつ

2.8　解答

9-1　次の（１）がなりたてば、（２）がなりたつことを示せ。
（１）　$\lim_{x\to a} f(x) = A$
（２）　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と、$a_n \neq a (n = 1, 2, \cdots)$ をみたす任意の数列 a_n について、

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$$

解　　数列 a_n は　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と、$a_n \neq a (n = 1, 2, \cdots)$ をみたすものとする。

$\varepsilon > 0$　とする。（１）より、

$0 < |x - a| < \delta$ をみたす x について、$|f(x) - A| < \varepsilon$

となる正数 δ が存在する。

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|a_n - a| < \delta$

となる自然数 N が存在する。したがって、

$n \geqq N$ をみたす自然数 n について、$|f(a_n) - A| < \varepsilon$ がなりたつ。すなわち、

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$ がなりたつ。

9-2　上の（１）が成り立たなければ、（２）が成り立たないことを示せ。

解　　（１）が成り立たないとすると、次の性質をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する。

任意の $\delta > 0$ に対して、$0 < |x - a| < \delta$ と　$|f(x) - A| > \varepsilon$ をみたす x が存在する。

n を自然数とし、$\delta = \dfrac{1}{n}$ のときの、上の x を a_n で表すと、

$0 < |a_n - a| < \dfrac{1}{n}, |f(a_n) - A| > \varepsilon > 0$

がすべての自然数 n についてなりたつ。

したがって、$\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n \neq a$ であるが、$f(a_n)$ は A に近づかない。つまり、（２）が成り立たない。